複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ち寄り，交換会を開く．ただし，プレゼントはすべて異なるとする．プレゼントの交換は次の手順で行う．

手順

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで，各参加者に袋を一つずつでたらめに配る．各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る．

交換の結果，1 人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す．そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する．

(1) 2 人または 3 人で交換会を開く場合を考える．

(i) 2 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

(ii) 3 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するフレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．したがって，1 回目の交換で交換会が終了確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(iii) 3 人で交換会を開く場合，4 回以下の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

(2) 4 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率を次の構想に基づいて求めてみよう．

構想

1 回目の交換で変換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数を求める．そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする．

1 回目の交換で，4 人のうち，ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{サ}}$ 通りあり，ちょうど 2 人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{シ}}$ 通りある．このように考えていくと，1 回目のプレゼントの受け取り方のうち，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{\text{スセ}}$ である．

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

(3) 5 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である．

(4) A, B, C, D, E の 5 人が交換会を開く．1 回目の交換で A, B, C, D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である．

(22 共通テスト 第 1 日程 IA 3)

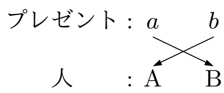
【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケコ	サ	シ	スセ	ソ	タ	チツ
1	1	2	2	1	3	65	81	8	6	15	3	8	11

テト	ナニ	ヌネ
30	44	53

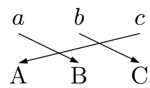
【解答】

(1) (i) A，B の 2 人がそれぞれプレゼント a, b を持ち寄り交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は右図の **1** 通り ある．……(答)



プレゼントの受け取り方は 2! 通りあるから，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{1}{2!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ である．……(答)

(ii) A，B，C の 3 人がそれぞれプレゼント a, b, c を持ち寄り交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は，a を受け取るのは B, C の 2 通りがあり，これが決まると残りの受け取り方は 1 通りに決まる．したがって，受け取り方は **2** 通り ある．……(答)



プレゼントの受け取り方は 3! 通りあるから，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{2}{3!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ である．……(答)

(iii) 3 人で交換会を開く場合，(ii) より，1 回の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{1}{3}$，終了しない確率は $\dfrac{2}{3}$ である．

どの回で終了するかで場合分けすると，4 回以下の交換で交換会が終了する確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{27+18+12+8}{3^3}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{65}{81}}
\end{aligned}$$
……(答)

である．

- 余事象を考えてもよい．

  余事象は 4 回目が終わっても交換会が終了しないという事象であるから

  $$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{81-16}{81} = \frac{65}{81}$$

(2) 1 回目の交換で，4 人のうち

ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合の数は，自分の持参したプレゼントを受け取るのがどの人であるかを決める (${}_4\mathrm{C}_1$ 通り) と，他の 3 人のプレゼントの受け取り方は 2 通り ($\because$ (1)(ii)) であるから　${}_4\mathrm{C}_1 \cdot 2 = \mathbf{8}$ 通り．　……(答)

ちょうど 2 人が自分のプレゼントを受け取る場合の数は　${}_4\mathrm{C}_2 \cdot 1 = \mathbf{6}$ 通り．　……(答)

ちょうど 3 人が自分のプレゼントを受け取るということはなく，

ちょうど 4 人が自分のプレゼントを受け取るのは　1 通り．

よって，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は

$$8 + 6 + 0 + 1 = \mathbf{15} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は

$$1 - \frac{15}{4!} = 1 - \frac{5}{8} = \mathbf{\frac{3}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

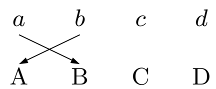
である．

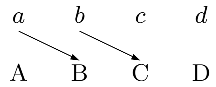
- 直接，数えてみる．

  プレゼント a は A 以外の 3 人の誰かが受け取る (3 通り)．その人を B としたとき，B が持ってきたプレゼント b を誰が受け取るかを考える．

  A が b を受け取るとき，C，D の受け取り方は 1 通り．

  A が b を受け取らないとき，b を受け取るのは C または D(2 通り) であり，これが決まると残り 2 つのプレゼントの受け取り方は 1 通りに決まる．





  これより，1 回目のプレゼントの受け取り方のうち，1 回目の交換で交換会が終了する受け取り方の総数は

  $$3(1 + 2 \cdot 1) = 9$$

  したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は

  $$\frac{9}{4!} = \frac{3}{8}$$

(3) (2) と同じように考える．5 人のうち

ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取るのは ${}_5\mathrm{C}_1 \cdot (4! - 15) = 5 \cdot 9 = 45$ 通り．

ちょうど 2 人が自分の持参したプレゼントを受け取るのは　${}_5\mathrm{C}_2 \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$ 通り．

ちょうど 3 人が自分の持参したプレゼントを受け取るのは　${}_5\mathrm{C}_3 \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10$ 通り．

ちょうど 4 人が自分の持参したプレゼントを受け取るのは　0 通り．

ちょうど 5 人が自分の持参したプレゼントを受け取るのは　1 通り．

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は

$$1 - \frac{45 + 20 + 10 + 0 + 1}{5!} = 1 - \frac{76}{5!} = 1 - \frac{19}{30} = \mathbf{\frac{11}{30}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- (2) と同じようにして，直接数えると，1 回の交換で交換会が終了するのは

  $$4(2 + 3 \cdot 3) = 44 \ (通り)$$

  あるから，1 回目の交換で交換会が終了する確率は

  $$\frac{44}{5!} = \frac{11}{30}$$

(4) A, B, C, D, E の 5 人が交換会を開くとき，1 回目の交換で A, B, C, D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取るという事象を X，1 回目の交換で交換会が終了するという事象を Y とおくと，求める確率は

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(X \cap Y) + P(X \cap \overline{Y})}$$

である．

$X \cap Y$ は，1 回目の交換で A，B，C，D，E の 5 人がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取るという事象であり，この確率は (3) で計算済である．

$X \cap \overline{Y}$ は，1 回目の交換で A，B，C，D の 4 人がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取るが，E は自分が持参したプレゼントを受け取るという事象である．(2) より A，B，C，D の 4 人の受け取り方は $4! - 15 = 9$ 通り，E の受け取り方は 1 通りであるから，この確率は $\dfrac{9 \cdot 1}{5!} = \dfrac{3}{40}$ である．

よって，

$$P_X(Y) = \frac{\dfrac{11}{30}}{\dfrac{11}{30} + \dfrac{3}{40}} = \frac{44}{44+9} = \mathbf{\frac{44}{53}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 1 回目の交換で交換会が終了する受け取り方は

  4 人のとき 9 通り，　5 人のとき 44 通り

  あるから

  $$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{n(X \cap Y)}{n(X \cap Y) + n(X \cap \overline{Y})} = \frac{44}{44+9} = \frac{44}{53}$$

  である．