n は 5 以上の自然数とする．赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う．以下の問いに答えよ．

(1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ．

(2) 赤玉が 2 度以上連続することなくちょうど 3 度出る確率を求めよ．

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき，赤玉が 2 度以上連続することなく 3 度出ている条件付き確率を求めよ．

(22 札幌医大 3)

【答】

(1) $\dfrac{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}$

(2) $\dfrac{27(n-2)(n-3)(n-4)7^{n-3}}{6\cdot 10^n}$

(3) $\dfrac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}$

【解答】

1 回の試行で赤玉が取り出される確率は $\dfrac{3}{10}$，白玉が取り出される確率は $\dfrac{7}{10}$ である．

(1) n 回目に 3 度目の赤玉が出るのは，$n-1$ 回目までに 2 度赤玉が出ていて n 回目に 3 度目の赤玉が出るときである．求める確率は

$$\begin{aligned}{}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\cdot\frac{3}{10} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}\cdot\frac{3^3\cdot 7^{n-3}}{10^n}\\ &= \boldsymbol{\frac{27(n-1)(n-2)7^{n-3}}{2\cdot 10^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) 赤玉が 2 度以上連続することなくちょうど 3 度出る玉の取り出し方は，$n-3$ 個の白球の列の両端または隙間に赤玉 3 個を 1 個ずつ入れるときの並べ方と一致するから，求める確率は

$$\begin{aligned}{}_{n-2}\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} &= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 2\cdot 1}\,\frac{3^3\cdot 7^{n-3}}{10^n}\\ &= \boldsymbol{\frac{27(n-2)(n-3)(n-4)7^{n-3}}{6\cdot 10^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出るという事象を A，赤玉が 2 度以上連続することなく 3 度出るという事象を B とおくと，求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である．$P(A)$ は (1) の確率である．

$A\cap B$ となるのは，$n-4$ 個の白球の列の両端または隙間に赤玉 2 個を 1 個ずつ入れ，この列の右端に白球，赤球をこの順に並べる並べ方と一致するから

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= {}_{n-3}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-4}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}\\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{2\cdot 1}\,\frac{3^3\cdot 7^{n-3}}{10^n}\\ &= \frac{27(n-3)(n-4)7^{n-3}}{2\cdot 10^n}\end{aligned}$$

である．求める条件付き確率は

$$\begin{aligned}P_A(B) &= \frac{27(n-3)(n-4)7^{n-3}}{2\cdot 10^n}\times\frac{2\cdot 10^n}{27(n-1)(n-2)7^{n-3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．