1 個のさいころを 4 回続けて投げ，i 回目に出る目の数を a_i とする．O を原点とする座標平面上に 4 点 A$(a_1,\ 0)$，B$(0,\ a_2)$，C$(-a_3,\ 0)$，D$(0,\ -a_4)$ をとるとき，次の各問に答えよ．

(1) 四角形 ABCD が直線 $y=-x$ に関して対称になる確率を求めよ．

(2) 四角形 ABCD がひし形であったとき，四角形 ABCD が長方形である条件付き確率を求めよ．

(3) 三角形 OAB と三角形 OCD の面積の和が，三角形 OAD と三角形 OBC の面積の和より大きくなる確率を求めよ．

(22 茨城大 教育 4)

【答】

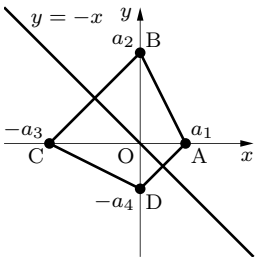
(1) $\dfrac{1}{36}$

(2) $\dfrac{1}{6}$

(3) $\dfrac{25}{72}$

【解答】

(1) 四角形 ABCD が直線 $y=-x$ に関して対称になる条件は



$$\begin{cases} a_1 = a_4 \\ a_2 = a_3 \end{cases}$$

である．

$a_1 = a_4$，$a_2 = a_3$ となる場合は，それぞれ 6 通りずつあるから，求める確率は

$$\frac{6\cdot 6}{6^4} = \boldsymbol{\frac{1}{36}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ひし形の 2 本の対角線は中点で直交するから，四角形 ABCD がひし形である条件は

$$\begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_4 \end{cases}$$

である．これが起こる場合は (1) と同じく 6^2 通りある．

このうち，四角形 ABCD が長方形になるのは 2 つの対角線の長さが等しいときだから

$$\begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_4 \\ a_1 + a_3 = a_2 + a_4 \end{cases} \iff a_1 = a_2 = a_3 = a_4$$

のときに限られる．これが起こる場合は 6 通りあるから，四角形 ABCD がひし形であったとき，長方形である条件付き確率は

$$\frac{6}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) △OAB, △OCD, △OAD, △OBC の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}a_1a_2,\quad \frac{1}{2}a_3a_4,\quad \frac{1}{2}a_1a_4,\quad \frac{1}{2}a_2a_3$$

であるから，与えられた条件は

$$\frac{1}{2}a_1a_2+\frac{1}{2}a_3a_4>\frac{1}{2}a_1a_4+\frac{1}{2}a_2a_3$$

$$a_1a_2+a_3a_4-a_1a_4-a_2a_3>0$$

$$\therefore\quad (a_1-a_3)(a_2-a_4)>0$$

である．

よって，次の 2 つの場合がある．

$$(\mathrm{i})\begin{cases}a_1>a_3\\a_2>a_4\end{cases}\qquad (\mathrm{ii})\begin{cases}a_1<a_3\\a_2<a_4\end{cases}$$

(i)　$a_1>a_3$ となる組 $(a_1,\ a_3)$ は

$${}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15 \text{ 通り}$$

ある．$(a_2,\ a_4)$ も同じく 15 通りあるから，(i) を満たすのは

$$15^2 \text{ 通り}$$

ある．

(ii) についても同様である．

よって，求める確率は

$$\frac{15^2\times2}{6^4}=\boldsymbol{\frac{25}{72}}$$ ……(答)

である．