当たりくじ 1 本を含む 10 本のくじがある．このくじを 1 本引いて，当たりくじであるかを確認した後，元に戻す試行を T とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 試行 T を 5 回繰り返したとき，当たりくじを引いた回数がちょうど 2 回である確率を求めなさい．

(2) 当たりくじを 3 回引くまで試行 T を繰り返すとき，ちょうど n 回目で終わる確率を p_n とする．ただし，$n \geqq 3$ とする．次の設問に答えなさい．

(i) p_n を n を用いて表しなさい．

(ii) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を n を用いて表しなさい．

(iii) p_n が最大となる n をすべて求めなさい．

(22 岩手県大 ソフト情 2)

【答】

(1) $\dfrac{729}{10000}$

(2) (i) $p_n = \dfrac{(n-1)(n-2)\cdot 9^{n-3}}{2\cdot 10^n}$ (ii) $\dfrac{9n}{10(n-2)}$ (iii) 20, 21

【解答】

(1) 試行 T を 1 回行うとき，当たりくじを引く確率は $\dfrac{1}{10}$ であるから，試行 T を 5 回繰り返したとき，当たりくじを引いた回数がちょうど 2 回である確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(1-\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{9^3}{10^5} = \mathbf{\frac{729}{10000}} \quad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(2) (i) ちょうど n 回目で終わるのは，1 回目から $n-1$ 回目までに当たりくじを 2 回，外れくじを $n-3$ 回引き，n 回目に当たりくじを引くという事象であるから，その確率は

$$ \begin{aligned} p_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{n-3}\times\frac{1}{10} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}\cdot\frac{9^{n-3}}{10^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)\cdot 9^{n-3}}{2\cdot 10^n}} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned} $$

である．

(ii) (i) の結果より

$$ \begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{n(n-1)\cdot 9^{n-2}}{2\cdot 10^{n+1}}\cdot\frac{2\cdot 10^n}{(n-1)(n-2)\cdot 9^{n-3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{9n}{10(n-2)}} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned} $$

である．

(iii) p_n の増減を調べる．

$$ p_n < p_{n+1} \iff \frac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \iff \frac{9n}{10(n-2)} > 1 \quad (\because\ \text{(ii)}) $$

$n \geqq 3$ より $n-2>0$ であるから

$$ 9n > 10(n-2) \qquad \therefore\quad n < 20 $$

また，

$n = 20$ のとき，　$p_{20} = p_{21}$
$n > 20$ のとき，　$p_n > p_{n+1}$
でもあるから

$$p_3 < p_4 < \cdots < p_{19} < p_{20} = p_{21},\ p_{21} > p_{22} > \cdots$$

となる．よって，p_n が最大となる n のすべては

$$\boldsymbol{n = 20,\ 21} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．