座標平面上で，不等式 $\dfrac{2^{x+2}}{3^{y-2}}+\dfrac{3^y}{2^{x-1}} \leqq 18$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とする．

(1) 点 $(\log_5 3,\ \log_5 10)$ は D に属することを示せ．
(2) D を図示せよ．

(22 群馬大 医 2)

【答】
(1) 略
(2) 略

【解答】

$$\frac{2^{x+2}}{3^{y-2}}+\frac{3^y}{2^{x-1}} \leqq 18 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① の左辺を整理すると

$$(\text{左辺})=\frac{2^2\cdot 2^x}{\dfrac{3^y}{3^2}}+\frac{3^y}{\dfrac{2^x}{2}}=\frac{36\cdot 2^x}{3^y}+\frac{2\cdot 3^y}{2^x}$$

さらに，$3^y=2^{\log_2 3^y}=2^{y\log_2 3}$ を利用して，底を 2 にそろえると

$$(\text{左辺})=\frac{36\cdot 2^x}{2^{y\log_2 3}}+\frac{2\cdot 2^{y\log_2 3}}{2^x}=36\cdot 2^{x-y\log_2 3}+\frac{2}{2^{x-y\log_2 3}}$$

ここで，$x-y\log_2 3$ に $x=\log_5 3,\ y=\log_5 10$ を代入すると

$$\begin{aligned} x-y\log_2 3 &= \log_5 3-\log_5 10\cdot\log_2 3 \\ &= \frac{\log_2 3}{\log_2 5}-\frac{\log_2 2+\log_2 5}{\log_2 5}\cdot\log_2 3 \\ &= \frac{(1-1-\log_2 5)\cdot\log_2 3}{\log_2 5} \\ &= -\log_2 3 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 36\cdot 2^{-\log_2 3}+\frac{2}{2^{-\log_2 3}} \\ &= \frac{36}{2^{\log_2 3}}+2\cdot 2^{\log_2 3} \\ &= \frac{36}{3}+2\cdot 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

であり，① を満たすから，点 $(\log_5 3,\ \log_5 10)$ は D に属する．　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) (1) の変形において，$t=2^{x-y\log_2 3}$ とおくと

$$① \iff 36t+\frac{2}{t} \leqq 18$$

$t > 0$ より

$$① \iff 18t^2 - 9t + 1 \leqq 0$$
$$\therefore \quad (3t-1)(6t-1) \leqq 0$$
$$\therefore \quad \frac{1}{6} \leqq t \leqq \frac{1}{3}$$
$$\therefore \quad 6^{-1} \leqq 2^{x - y\log_2 3} \leqq 3^{-1}$$

底 2 の対数をとると

$$-\log_2 6 \leqq x - y\log_2 3 \leqq -\log_2 3$$
$$\log_2 3 \leqq y\log_2 3 - x \leqq \log_2 6$$
$$\log_2 3 \leqq y\log_2 3 - x \leqq 1 + \log_2 3$$
$$\therefore \quad \frac{x}{\log_2 3} + 1 \leqq y \leqq \frac{x}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 3} + 1$$
$$\therefore \quad (\log_3 2)x + 1 \leqq y \leqq (\log_3 2)x + \log_3 2 + 1$$

よって，D を図示すると，右図の斜線部分となる．境界も含む．　　　　　　…… (証明終わり)