座標平面上で，不等式 $\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+\dfrac{3^{y-1}}{2^x}\leqq 3$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とする．

(1) 点 $(\log_2 3,\ \log_3 9)$ は D に属することを示せ．

(2) 不等式 $t-3+\dfrac{2}{t}\leqq 0$ を満たす正の実数 t の範囲を求めよ．

(3) D を図示せよ．

(22 群馬大 理工・情報 2)

【答】

(1) 略

(2) $1\leqq t\leqq 2$

(3) 略

【解答】

$$\frac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+\frac{3^{y-1}}{2^x}\leqq 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① の左辺を整理すると

$$(\text{左辺})=\frac{2\cdot 2^x}{\frac{3^y}{3}}+\frac{\frac{3^y}{3}}{2^x}=\frac{6\cdot 2^x}{3^y}+\frac{3^y}{3\cdot 2^x}$$

$x=\log_2 3,\ y=\log_3 9$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{6\cdot 2^{\log_2 3}}{3^{\log_3 9}}+\frac{3^{\log_3 9}}{3\cdot 2^{\log_2 3}}\\&=\frac{6\cdot 3}{9}+\frac{9}{3\cdot 3}\\&=3\end{aligned}$$

であり，① を満たすから，点 $(\log_2 3,\ \log_3 9)$ は D に属する． ……(証明終わり)

(2)
$$t-3+\frac{2}{t}\leqq 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$t>0$ より ② は

$$\begin{aligned}&② \iff t^2-3t+2\leqq 0\\&\therefore\quad (t-1)(t-2)\leqq 0\\&\therefore\quad \boldsymbol{1\leqq t\leqq 2}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) ① において，$t=\dfrac{3^{y-1}}{2^x}$ とおくと，$t>0$ であり，① は

$$① \iff \frac{2}{t}+t\leqq 3 \iff ②$$

となる．(2) の結果より

$$1\leqq \frac{3^{y-1}}{2^x}\leqq 2$$
$$2^x\leqq 3^{y-1}\leqq 2\cdot 2^x$$

底 3 の対数をとると

$$x\log_3 2\leqq y-1\leqq \log_3 2+x\log_3 2$$
$$\therefore\quad x\log_3 2+1\leqq y\leqq x\log_3 2+1+\log_3 2$$

よって，D を図示すると，右図の斜線部分となる．境界も含む． ……(証明終わり)