実数 k を定数とする．x と y に関する連立方程式

$$\begin{cases} 2^{x+1}+3^y=2 \\ k\cdot 2^x-3^y=3k-1 \end{cases}$$

の解が存在するような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}<k<\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

(22 西南学院大 全学 1(3))

【答】

シス	セ	ソ	タ
-1	3	1	2

【解答】

$$(*)\begin{cases} 2^{x+1}+3^y=2 \\ k\cdot 2^x-3^y=3k-1 \end{cases}$$

$2^x=X,\ 3^y=Y$ とおくと，$X>0,\ Y>0$ であり，連立方程式 $(*)$ は

$$(**)\begin{cases} 2X+Y=2 \\ kX-Y=3k-1 \end{cases}$$

となる.「$(*)$ の解 $x,\ y$ が存在する」ことと「$(**)$ をみたす正の解 $X,\ Y$ が存在する」ことは同値である．

$$(**) \iff \begin{cases} Y=2-2X \\ kX-(2-2X)=3k-1 \end{cases} \iff \begin{cases} Y=2-2X & \cdots\cdots ① \\ (k+2)X=3k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$k=-2$ とする ② は $0\cdot X=-5$ となり不合理．$k\fallingdotseq -2$ であるから

$$(**) \iff \begin{cases} X=\dfrac{3k+1}{k+2} \\ Y=2-2\cdot\dfrac{3k+1}{k+2} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} X=\dfrac{3k+1}{k+2} \\ Y=\dfrac{2(1-2k)}{k+2} \end{cases}$$

$X>0,\ Y>0$ より

$$\begin{cases} \dfrac{3k+1}{k+2}>0 \\ \dfrac{2(1-2k)}{k+2}>0 \end{cases}$$

辺々に $(k+2)^2(>0)$ をかけると

$$\begin{cases} (3k+1)(k+2)>0 \\ 2(1-2k)(k+2)>0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} k<-2 \text{ または } -\dfrac{1}{3}<k \\ -2<k<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

よって，k の求める値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．