

次の方程式

$$\log_{\frac{1}{3}}(9x^2) \cdot \log_3\left(\frac{x}{81}\right) = -12$$

を解け.

(22 長崎大 医・工・歯・教育・薬・情報 3(2))

【答】  $x = 243, \frac{1}{9}$

【解答】

$$\log_{\frac{1}{3}}(9x^2) \cdot \log_3\left(\frac{x}{81}\right) = -12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(真数) > 0 より

$$\begin{cases} 9x^2 \neq 0 \\ \frac{x}{81} > 0 \end{cases} \quad \therefore x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② のとき, ① の左辺は

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{(\log_3 9 + \log_3 x^2)}{\log_3 \frac{1}{3}} \cdot (\log_3 x - \log_3 81) \\ &= -(2 + 2\log_3 x)(\log_3 x - 4) \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$  とおくと

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff -(2 + 2t)(t - 4) = -12 \\ 2t^2 - 6t - 8 &= 12 \\ t^2 - 3t - 10 &= 0 \\ (t - 5)(t + 2) &= 0 \\ \therefore t &= 5, -2 \end{aligned}$$

したがって,  $x$  は

$$x = 3^5, 3^{-2} = 243, \frac{1}{9}$$

であり, どちらも ② を満たす. よって, 解は

$$x = 243, \frac{1}{9} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.