座標平面において，原点 O と点 A$(1,\ 0)$ と点 B$(0,\ 1)$ がある．$0 < t < 1$ に対し，線分 BO，OA，AB のそれぞれを $t : (1-t)$ に内分する点を P，Q，R とする．

(1) △PQR の面積を t の式で表せ．
(2) △PQR が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ．
(3) $\theta = \angle\mathrm{RPQ}$ とする．(2) のそれぞれの場合に $\cos\theta$ を求めよ．

(22 千葉大 2)

【答】

(1) $\dfrac{1}{2}(3t^2-3t+1)$

(2) $t = \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}$

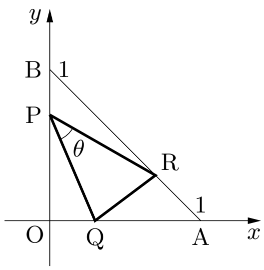
(3) $t = \dfrac{1}{3}$ のとき $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$t = \dfrac{2}{3}$ のとき $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【解答】

(1) 線分 BO，OA，AB のそれぞれを $t : (1-t)$ に内分する点 P，Q，R の座標は

$$\mathrm{P}(0,\ 1-t),\ \mathrm{Q}(t,\ 0),\ \mathrm{R}(1-t,\ t)$$

である．



$$\begin{aligned}
&\triangle\mathrm{PQR} \\
&= \triangle\mathrm{OAB} - (\triangle\mathrm{OPQ} + \triangle\mathrm{AQR} + \triangle\mathrm{BPR}) \\
&= \frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{2}t(1-t) + \frac{1}{2}(1-t)t + \frac{1}{2}t(1-t)\right\} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1-t)t \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}(3t^2-3t+1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (t,\ t-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (1-t,\ 2t-1)$ であり

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}|t(2t-1)-(t-1)(1-t)| \\
&= \frac{1}{2}|3t^2-3t+1|
\end{aligned}$$

である．ここで $3t^2-3t+1 = 3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} > 0$ であるから

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(3t^2-3t+1)$$

である．

(2) △PQR が二等辺三角形になる条件は

(i) PQ $=$ QR　(ii) QR $=$ PR　(iii) PR $=$ PQ

のいずれかが成り立つことである．

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2 + (t-1)^2 = 2t^2-2t+1$$
$$\mathrm{QR}^2 = (1-2t)^2 + t^2 = 5t^2-4t+1$$
$$\mathrm{PR}^2 = (1-t)^2 + (2t-1)^2 = 5t^2-6t+2$$

であるから

$$\text{(i)} \iff 2t^2-2t+1=5t^2-4t+1$$
$$\therefore\quad 3t^2-2t=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{2}{3}\quad (\because\ 0<t<1)$$

$$\text{(ii)} \iff 5t^2-4t+1=5t^2-6t+2$$
$$\therefore\quad 2t=1 \qquad \therefore\quad t=\frac{1}{2}\quad (0<t<1 \text{ を満たす})$$

$$\text{(iii)} \iff 5t^2-6t+2=2t^2-2t+1$$
$$\therefore\quad 3t^2-4t+1=0$$
$$\therefore\quad (3t-1)(t-1)=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{1}{3}\quad (\because\ 0<t<1)$$

よって，求める t の値をすべては

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}}$$ ……(答)

である．

(3) $\theta=\angle\mathrm{RPQ}$ であるから，余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2}{2\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}\\ &= \frac{(2t^2-2t+1)+(5t^2-6t+2)-(5t^2-4t+1)}{2\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}\\ &= \frac{2t^2-4t+2}{2\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}\\ &= \frac{(t-1)^2}{\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}\end{aligned}$$

である．(2) のそれぞれの場合の $\cos\theta$ は

$\boldsymbol{t=\frac{1}{3}}$ のとき $\quad \cos\theta=\dfrac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{5}{9}}\sqrt{\frac{5}{9}}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$ ……(答)

$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$ のとき $\quad \cos\theta=\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ ……(答)

$\boldsymbol{t=\frac{2}{3}}$ のとき $\quad \cos\theta=\dfrac{\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{5}{9}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{10}}$ ……(答)

である．