$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす θ に対して，O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ をとる．

(1) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を動くとき，A の軌跡を求めよ．

(2) 線分 OA の長さを $\cos\dfrac{\theta}{2}$ を用いて表せ．

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，△AOB の面積 S を θ を用いて表せ．

(4) (3) のとき，$S = 2\sin\theta$ となる θ の値を求めよ．

(22 東京海洋大 海洋工 1)

【答】

(1) 点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円

(2) $\mathrm{OA} = 2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

(3) $S = \sin 2\theta + \sin\theta$

(4) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

【解答】

(1) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を動くとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (1+\cos\theta,\ \sin\theta)\\ &= (1,\ 0) + (\cos\theta,\ \sin\theta)\end{aligned}$$

より，A の軌跡は

点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 ……(答)

である．

- $\mathrm{A}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x = 1+\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = x-1 \\ \sin\theta = y \end{cases}$$

であり，θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を動くとき，A は円

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

上をすべて動く．

(2) $\mathrm{A}(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{OA} &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\\ &= \sqrt{2+2\cos\theta}\\ &= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} \quad (\because\ \text{半角の公式})\\ &= \boldsymbol{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) $\mathrm{A}(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ より

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|(1+\cos\theta)\cdot 2\sin 2\theta - \sin\theta\cdot 2\cos 2\theta|\\ &= |\sin 2\theta + \sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta|\\ &= |\sin 2\theta + \sin\theta| \quad (\because\ \text{加法定理})\end{aligned}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\sin 2\theta + \sin\theta > 0$ より

$$\boldsymbol{S = \sin 2\theta + \sin\theta}$$ ……(答)

である．

(4) $\sin 2\theta + \sin\theta = 2\sin\theta$ となる θ は

$$\sin 2\theta = \sin\theta$$
$$\therefore \quad 2\theta = \theta + 2n\pi,\ \pi - \theta + 2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < 2\theta < \pi$ であるから

$$2\theta = \theta,\ \pi - \theta$$
$$\therefore \quad \theta = 0,\ \frac{\pi}{3}$$

よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$　である．　……(答)

- $\sin 2\theta = \sin\theta$ より

$$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta \neq 0$ であり

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

である．