円 T に内接する四角形 ABCD があり，各辺の長さは $\mathrm{AB}=4,\ \mathrm{BC}=2,$ $\mathrm{CD}=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \mathrm{DA}=2\sqrt{2}$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{ABC}=\alpha,\ \angle\mathrm{CDA}=\beta$ とするとき，$\cos\beta$ を $\cos\alpha$ の式で示せ．

(2) $\cos\alpha$ の値，および AC の長さを求めよ．

(3) 円 T の半径，および BD の長さを求めよ．

(22 東北学院大 工 A 7)

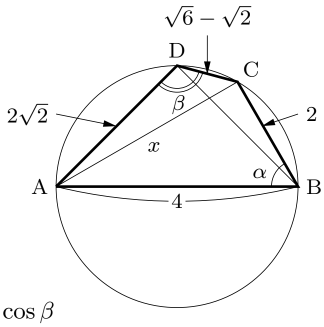
【答】

(1) $\cos\beta=-\cos\alpha$

(2) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$

(3) (半径) $=2$，$\mathrm{BD}=2\sqrt{2}$

【解答】



(1) 四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\alpha+\beta=180^\circ$$

であり

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos(180^\circ-\alpha)\\&=\boldsymbol{-\cos\alpha}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．

(2) $\mathrm{AC}=x$ とおき，$\triangle\mathrm{ABC},\ \triangle\mathrm{ACD}$ で余弦定理を用いると

$$\begin{cases}x^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos\alpha\\x^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2\cdot2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\beta\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x^2=20-16\cos\alpha\\x^2=16-4\sqrt{3}+8(\sqrt{3}-1)\cos\alpha\quad(\because\ (1))\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x^2=20-16\cos\alpha\\20-16\cos\alpha=16-4\sqrt{3}+8(\sqrt{3}-1)\cos\alpha\end{cases}$$

第 2 式より

$$8(\sqrt{3}+1)\cos\alpha=4(1+\sqrt{3})\qquad\therefore\quad\boldsymbol{\cos\alpha=\frac{1}{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

よって

$$x^2=20-16\cdot\frac{1}{2}=12\qquad\therefore\quad\boldsymbol{\mathrm{AC}=2\sqrt{3}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 円 T の半径を R とおくと，正弦定理より $2R=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\alpha}$ である．

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ)$ より $\alpha=60^\circ$ であるから

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boldsymbol{2}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．したがって，$\mathrm{AB}(=4)$ は円 T の直径のひとつであり，$\triangle\mathrm{ABD}$ は $\angle\mathrm{BDA}=90^\circ$ の直角三角形である．

$$\therefore\quad\mathrm{BD}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- $\mathrm{BD}=y$, $\angle\mathrm{DAB}=\gamma$ とおき，$\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{BCD}$ で余弦定理を用いると

$$\begin{cases} y^2=4^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}\cos\gamma \\ y^2=2^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2\cdot 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos(180^\circ-\gamma) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} y^2=24-16\sqrt{2}\cos\gamma \\ y^2=12-4\sqrt{3}+4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\gamma \end{cases}$$

が成り立つ．これを解いて y を求めてもよい．

- $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$ (トレミーの定理) を用いることもできる．

$$4\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})+2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{3}\cdot\mathrm{BD}\quad(\because\ (2))$$

$$\therefore\quad \mathrm{BD}=\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$$