$\angle A=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$ である直角三角形 ABC において，その内接円の中心を O，半径を r とおく．また $a=BC$ とする．

(1) r を a で表せ．

(2) 次の条件をみたす負でない整数 k, ℓ, m, n の組を一つ求めよ．

$$OA:OB=1:k+\sqrt{\ell}, \qquad OA:OC=1:m+\sqrt{n}$$

(22 北海道大 文 3)

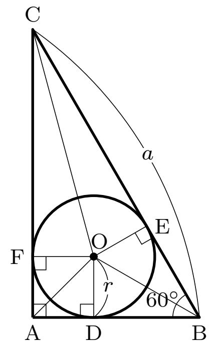
【答】

(1) $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}a$

(2) (k, l, m, n)=(0, 2, 1, 3)

【解答】

(1) $\angle A=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $BC=a$ より



$$AB=a\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a,\ CA=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

である．△ABC の面積を

$$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$$

とみると

$$\frac{1}{2}AB\cdot CA=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}CA\cdot r$$

であり

$$r=\frac{AB\cdot CA}{AB+BC+CA}=\frac{\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a+a+\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}a=\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{4}a} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 図のように内接円と各辺との接点を D，E，F とおくと，四角形 ADOF は正方形で $AD=AF=r$, $BD=BE$, $CE=CF$ であるから

$$BC=BE+CE=BD+CF=(AB-r)+(CA-r)$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{2}(AB+CA-BC)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a-a\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}a$$

である．

(2) 図のように内接円と各辺との接点を D，E，F とおくと，O は内心であるから

$$\angle OAF=45^\circ,\ \angle OBD=30^\circ,\ \angle OCE=15^\circ$$

であり

$$OA=\frac{r}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}r,\ OB=\frac{r}{\sin 30^\circ}=2r,\ OC=\frac{r}{\sin 15^\circ}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

より

$$\mathrm{OC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} r = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)r$$

である．したがって

$$\begin{aligned}&\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \sqrt{2}r : 2r = 1 : \sqrt{2} \\ &\mathrm{OA} : \mathrm{OC} = \sqrt{2}r : \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)r = 1 : 1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{cases}\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : k + \sqrt{\ell} \\ \mathrm{OA} : \mathrm{OC} = 1 : m + \sqrt{n}\end{cases}$$

をみたす負でない整数 k, ℓ, m, n の組は

$$\boldsymbol{(k,\ \ell,\ m,\ n) = (0,\ 2,\ 1,\ 3)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- △OAB，△OCA について正弦定理を用いてもよい．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{OA}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\sin 45^\circ} \\ \dfrac{\mathrm{OA}}{\sin 15^\circ} = \dfrac{\mathrm{OC}}{\sin 45^\circ}\end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases}\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ \\ \mathrm{OA} : \mathrm{OC} = \sin 15^\circ : \sin 45^\circ\end{cases}$$

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 15^\circ = \cdots = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ より

$$\begin{cases}\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 : \sqrt{2} \\ \mathrm{OA} : \mathrm{OC} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} : \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 : \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = 1 : 1+\sqrt{3}\end{cases}$$

よって，求める負でない整数 k, ℓ, m, n の組は

$$(k,\ \ell,\ m,\ n) = (0,\ 2,\ 1,\ 3)$$

である．