次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい．

(1) $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ が有理数であり，$\tan(\alpha+\beta)$ が定義されるとき，$\tan(\alpha+\beta)$ も有理数であることを示せ．

(2) $\tan 10^\circ$ は無理数であることを示せ．

(3) $\tan(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ が成り立つことを，鋭角の三角比の定義にもとづいて説明せよ．

(4) $\tan 8^\circ$ は無理数であることを示せ．

(22 北海道教大 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

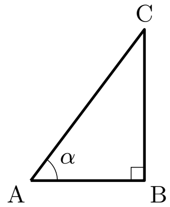
(1) 加法定理より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

であり，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ が有理数であるならば，右辺は有理数である．
よって，$\tan(\alpha+\beta)$ は有理数である．　……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．
$\tan 10^\circ$ を有理数と仮定すると，(1) より $\tan 20^\circ=\tan(10^\circ+10^\circ)$ は有理数であり，$\tan 30^\circ=\tan(20^\circ+10^\circ)$，$\tan 60^\circ=\tan(30^\circ+30^\circ)$ も有理数である．
一方，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ は無理数だから，矛盾である．
よって，$\tan 10^\circ$ は無理数である．　……(証明終わり)

(3) 直角三角形 ABC において，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$，$\angle\mathrm{A}=\alpha$ とすると
$\angle\mathrm{C}=90^\circ-\alpha$ である．鋭角の三角比の定義により



$$\tan\alpha=\tan A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}},$$
$$\tan(90^\circ-\alpha)=\tan C=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

となり，$\tan(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ が成り立つ．　……(証明終わり)

(4) 背理法を用いる．
$\tan 8^\circ$ を有理数と仮定すると，(2) と同様にして，$\tan 80^\circ$ も有理数となる．
(3) より

$$\tan 10^\circ=\tan(90^\circ-80^\circ)=\frac{1}{\tan 80^\circ}$$

が成り立つ．この等式の右辺は有理数であるが，(2) より左辺は無理数であり，不合理である．
よって，$\tan 8^\circ$ は無理数である．　……(証明終わり)