関数 $f(\theta)=2\cos^3\theta-2\sin\theta\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta-3\cos\theta-\sin\theta+3$ について考える．$t=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$ を $t$ を用いて表せ．
(2) $f(\theta)$ を $t$ を用いて表せ．
(3) $t$ のとりうる値の範囲を求めよ．
(4) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ．

(22 富山大 後 工・都市 1)

---

【答】

(1) $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$
(2) $f(\theta)=-t^3-3t^2+6$
(3) $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$
(4) 最大値 6,　最小値 $-2\sqrt{2}$

---

【解答】

$$f(\theta)=2\cos^3\theta-2\sin\theta\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta-3\cos\theta-\sin\theta+3$$

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の辺々を平方すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

であるから

$$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $f(\theta)$ を変形すると

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\cos^3\theta-2\sin\theta(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta\cos\theta-3\cos\theta-\sin\theta+3\\&=2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)-6\sin\theta\cos\theta-3(\sin\theta+\cos\theta)+3\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}t^3&=\sin^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta\\&=\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t\end{aligned}$$

であるから

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=t^3-\frac{3}{2}(t^3-t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

である．よって

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\left(-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\right)-6\cdot\frac{t^2-1}{2}-3t+3\\&=\boldsymbol{-t^3-3t^2+6}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 合成すると

$$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので $\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{4}$ である．よって

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

$$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$ ……(答)

である．

(4) $g(t) = -t^3 - 3t^2 + 6$ とおくと

$$g'(t) = -3t^2 - 6t = -3t(t+2)$$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における $g(t)$ の増減は下表となる．

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $4$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $-2\sqrt{2}$ |

よって

**最大値は 6，最小値は $-2\sqrt{2}$** ……(答)

である．