$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{12}$ のとき，$\cos^4\theta + \sin^4\theta$ の最小値を求めよ．

(22 茨城大 工 3(2))

【答】 $\dfrac{7}{8}$

【解答】

与式の次数が下がるように変形すると

$$\begin{aligned}\cos^4\theta + \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{12}$ より $0 \leqq 4\theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$1 \geqq \cos 4\theta \geqq \dfrac{1}{2}$ であり，求める最小値は

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．