xy 平面上に中心 $(-3,\ -2)$，半径 $\sqrt{3}$ の円 C と，直線 $l: y = tx + 1$ がある．t は実数とする．C と l が異なる 2 点 A，B で交わっており，A，B の x 座標をそれぞれ $a,\ b\ (a < b)$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $t = \sqrt{2}$ であるとき，C の中心と l の距離を求めなさい．
(2) t のとり得る値の範囲を求めなさい．
(3) 弦 AB の長さが最大となる t の値を求めなさい．
(4) $a,\ b$ を t を用いてそれぞれ表しなさい．
(5) 弦 AB の長さが 2 となる t の値を求めなさい．

(22 岩手県大 ソフト情 1)

【答】

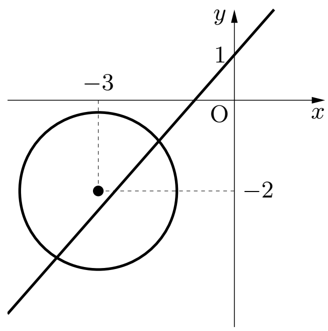
(1) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$
(2) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
(3) $t = 1$
(4) $a = \dfrac{-(3+3t) - \sqrt{-6t^2+18t-6}}{1+t^2},\ b = \dfrac{-(3+3t) + \sqrt{-6t^2+18t-6}}{1+t^2}$
(5) $\dfrac{9 \pm 4\sqrt{2}}{7}$

【解答】

$$C: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 3$$
$$l: tx - y + 1 = 0$$

(1) $t = \sqrt{2}$ であるとき，C の中心 $(-3,\ -2)$ と直線 $l: \sqrt{2}x - y + 1 = 0$ の距離は

$$\begin{aligned}&\frac{|\sqrt{2}\cdot(-3) - (-2) + 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2}}\\ &= \frac{|3 - 3\sqrt{2}|}{\sqrt{3}}\\ &= \boldsymbol{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$



である．

(2) 円 C と直線 l が異なる 2 点で交わる条件は

(中心と l の距離) $<$ (半径)

であるから

$$\begin{aligned}&\frac{|-3t - (-2) + 1|}{\sqrt{t^2 + (-1)^2}} < \sqrt{3}\\ &\iff 3|t-1| < \sqrt{3}\sqrt{(t^2+1)}\\ &\iff 3(t-1)^2 < t^2 + 1\end{aligned}$$

式を整理して解くと

$$2t^2 - 6t + 2 < 0$$
$$t^2 - 3t + 1 < 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 弦 AB の長さが最大となるのは，中心と l の距離が最小となるときである．

$$(\text{中心と } l \text{ の距離}) = \frac{3|t-1|}{\sqrt{t^2+1}} \geqq 0$$

であり，$t=1$ のとき等号が成立するから，弦 AB の長さが最大となる t の値は

$$\boldsymbol{t = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) t が ① を満たすとき

$$(x+3)^2 + \{(tx+1)+2\}^2 = 3$$

$$(t^2+1)x^2 + 6(t+1)x + 15 = 0$$

は異なる 2 つの実数解をもつ．この実数解が $a,\ b\ (a<b)$ であり，$a,\ b$ の値は

$$\boldsymbol{a = \frac{-3(t+1) - \sqrt{-6(t^2-3t+1)}}{t^2+1}}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{b = \frac{-3(t+1) + \sqrt{-6(t^2-3t+1)}}{t^2+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $\mathrm{AB}=2$ となるのは

$$(\text{半径})^2 - (\text{中心と } l \text{ の距離})^2 = \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2$$

を満たすときである．これを満たす t の値は

$$3 - \frac{9(t-1)^2}{t^2+1} = 1$$

$$2(t^2+1) = 9(t-1)^2$$

$$7t^2 - 18t + 7 = 0$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{t = \frac{9 \pm 4\sqrt{2}}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．