円 $C:(x-3)^2+y^2=4$ と直線 $l:y=ax+a+2$ について，以下の問いに答えよ．ただし円 C の中心を M とし，a の値によらず直線 l が通る点を A とする．

(1) 直線 l が円 C に接するときの a の値を求めよ．

(2) 線分 AM の長さを求めよ．

(3) 点 A から円 C へ接線を 2 本引き，接点を x 座標の大きい方から順に P，Q とする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PMQ}$ の値を求めよ．

(22 東北学院大 工 A 2)

【答】

(1) $0,\ -\dfrac{4}{3}$

(2) $2\sqrt{5}$

(3) $-\dfrac{3}{5}$

【解答】

$$C:(x-3)^2+y^2=4$$
$$l:y=ax+a+2$$

(1) 円 C の中心 M の座標は $(3,\ 0)$ であり，直線 $l:ax-y+a+2=0$ である．
直線 l が円 C に接する条件は，M と l との距離が C の半径 2 に等しいことであり

$$\frac{|a\cdot 3-0+a+2|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$$
$$|4a+2|=2\sqrt{a^2+1}$$
$$(2a+1)^2=a^2+1$$
$$3a^2+4a=0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a=0,\ -\frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) A は a の値によらず直線 l が通る点であるから

$$(x+1)a+2-y=0$$

は a についての恒等式であり，A の座標は $(-1,\ 2)$ である．
よって

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

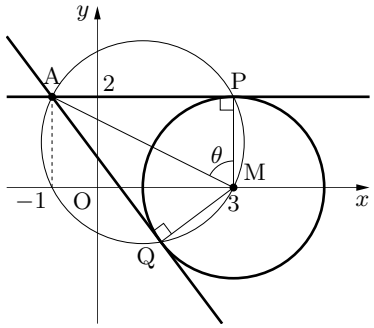
(3) $\angle\mathrm{PMA}=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AM}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって

$$\cos\angle\mathrm{PMQ}=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=2\cdot\frac{1}{5}-1$$
$$=\boldsymbol{-\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- $\angle\mathrm{APM} = \angle\mathrm{AQM} = \dfrac{\pi}{2}$ より四角形 APMQ は円に内接しており，$\angle\mathrm{PMQ}+\angle\mathrm{PAQ} = \pi$ が成り立つ．よって

$$\cos\angle\mathrm{PMQ} = \cos(\pi - \angle\mathrm{PAQ}) = -\cos\angle\mathrm{PAQ}$$

(1) より $\tan\angle\mathrm{PAQ} = -\dfrac{4}{3}$ であり

$$\cos^2\angle\mathrm{PAQ} = \frac{1}{1+\tan^2\angle\mathrm{PAQ}} = \frac{1}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{9}{25}$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \angle\mathrm{PAQ} < 0$ より $\cos\angle\mathrm{PAQ} = \dfrac{3}{5}$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{PMQ} = -\frac{3}{5}$$

である．