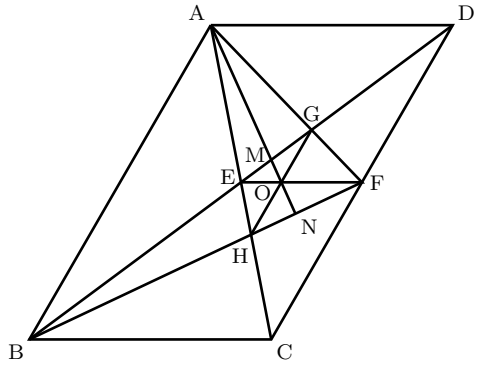
下の図のように，平行四辺形 ABCD の対角線の交点を E，辺 CD の中点を F とする．線分 AF と対角線 BD の交点を G，線分 BF と対角線 AC の交点を H とする．線分 EF と線分 GH の交点を O，線分 AO と対角線 BD の交点を M，線分 AO の延長と線分 BF との交点を N とする．ただし，$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 6$, $\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = 4$, $\angle\mathrm{BAD} = 120^\circ$ とする．



(1) 線分 BG の長さを求めよ．

(2) FN : HN を求めよ．

(3) 線分 GM の長さを求めよ．

(22 青森公立大 4)

【答】

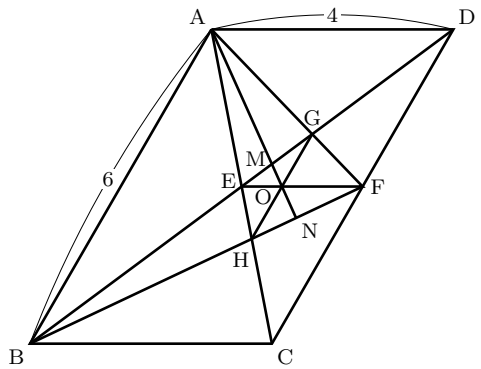
(1) $\mathrm{BG} = \dfrac{4}{3}\sqrt{19}$

(2) $\mathrm{FN} : \mathrm{HN} = 3 : 2$

(3) $\mathrm{GM} = \dfrac{4}{21}\sqrt{19}$

【解答】

(1) E は平行四辺形 ABCD の対角線の交点であり，対角線を 2 等分する．G は △ACD の重心であり，線分 ED を 1 : 2 に内分するから



$$\begin{aligned}\mathrm{BG} &= \mathrm{BE} + \mathrm{EG}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{BD} + \frac{1}{3}\mathrm{ED}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{BD} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{BD}\\ &= \frac{2}{3}\mathrm{BD}\end{aligned}$$

である．△ABD において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\cos\angle\mathrm{BAD}\\ &= 36 + 16 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 120^\circ\\ &= 76\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{BD} = 2\sqrt{19}$$

である．よって

$$\mathbf{BG} = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{19} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{19}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) △AHF においてチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{NH}} \cdot \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GF}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{NH}} \cdot \frac{\frac{1}{3}\mathrm{CE}}{\mathrm{CE}} \cdot \frac{\frac{2}{3}\mathrm{AF}}{\frac{1}{3}\mathrm{AF}} = 1 \quad (\because \text{ H は △CBD の重心, G は △ACD の重心})$$

$$\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{NH}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{NH}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{FN : HN = 3 : 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) △ANF と直線 GM についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{MB}} \cdot \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NF}} \cdot \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AG}} = 1$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NF}} &= \frac{\mathrm{BH} + \mathrm{HN}}{\mathrm{NF}} \\ &= \frac{2\mathrm{HF} + \frac{2}{5}\mathrm{HF}}{\frac{3}{5}\mathrm{HF}} \quad (\because \text{ H は △CBD の重心, および (2) の結果}) \\ &= \frac{12}{3} \\ &= \frac{4}{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AG}} &= \frac{\mathrm{FA}}{\frac{2}{3}\mathrm{FA}} \quad (\because \text{ G は △ACD の重心}) \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{MB}} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{MB}} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \mathrm{GM} &= \frac{1}{7}\mathrm{BG} = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{19} \quad (\because \text{ (1) の結果}) \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{21}\sqrt{19}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．