xy 平面上の楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ を考える．C の 2 つの焦点を F_1, F_2 とする．また，C 上に $-a<p<a$ となる点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，P における接線を l とする．点 F_1, F_2 から直線 l に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H_1, H_2 とする．このとき，$\triangle\mathrm{F}_1\mathrm{PH}_1$ と $\triangle\mathrm{F}_2\mathrm{PH}_2$ は相似であり，$\angle\mathrm{F}_1\mathrm{PH}_1=\angle\mathrm{F}_2\mathrm{PH}_2$ であることを示せ．ただし，点 H_1, H_2 は点 P と異なることを認めてよい

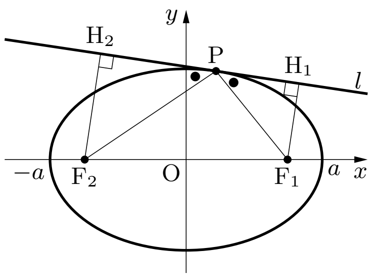
(22 山梨大 後 医 4)

【答】 略

【解答】

$$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

楕円 C の焦点の座標 F_1, F_2 の座標は



$$\mathrm{F}_1(c,\ 0),\ \mathrm{F}_2(-c,\ 0)$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，$\mathrm{P}(p,\ q)$ は楕円 C 上の点であるから

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

$\triangle\mathrm{F}_1\mathrm{PH}_1$ と $\triangle\mathrm{F}_2\mathrm{PH}_2$ が相似であることを示すには，$\triangle\mathrm{F}_1\mathrm{PH}_1$ と $\triangle\mathrm{F}_2\mathrm{PH}_2$ はともに直角三角形であるから

$$\mathrm{PF}_1:\mathrm{F}_1\mathrm{H}_1=\mathrm{PF}_2:\mathrm{F}_2\mathrm{H}_2$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF}_1{}^2&=(p-c)^2+q^2=(p-c)^2+b^2\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right) \quad (\because\ ②)\\
&=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)p^2-2cp+c^2+b^2\\
&=\frac{c^2}{a^2}p^2-2cp+a^2 \quad (\because\ ①)\\
&=\left(\frac{c}{a}p-a\right)^2
\end{aligned}$$

である．$\dfrac{c}{a}>0,\ -a<p<a$ から

$$\frac{c}{a}p<\frac{c}{a}\cdot a=c=\sqrt{a^2-b^2}<a$$

が成り立つので

$$\mathrm{PF}_1=a-\frac{c}{a}p$$

である．また，楕円の定義により $\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a$ が成り立つので

$$\mathrm{PF}_2=2a-\left(a-\frac{c}{a}p\right)=a+\frac{c}{a}p$$

である．

- 楕円の定義により $\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a$ が成り立ち

  $$\mathrm{PF}_1{}^2-\mathrm{PF}_2{}^2=\{(p-c)^2+q^2\}^2-\{(p+c)^2+q^2\}^2=-4pc$$

  が成り立つ．ここで

  $$\mathrm{PF}_1{}^2-\mathrm{PF}_2{}^2=(\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2)(\mathrm{PF}_1-\mathrm{PF}_2)=2a(\mathrm{PF}_1-\mathrm{PF}_2)$$

でもあるから

$$\begin{cases} \mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a \\ \mathrm{PF}_1-\mathrm{PF}_2=-2\dfrac{c}{a}p \end{cases}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PF}_1=a-\frac{c}{a}p,\ \mathrm{PF}_2=a+\frac{c}{a}p$$

となる．

つぎに，楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 l の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

$$\therefore\quad b^2px+a^2qy=a^2b^2$$

であるから

$$\mathrm{F_1H_1}=\frac{|b^2pc+0-a^2b^2|}{\sqrt{b^4p^2+a^4q^2}}=\frac{ab^2\left|\dfrac{c}{a}p-a\right|}{\sqrt{b^4p^2+a^4q^2}}=\frac{ab^2}{\sqrt{b^4p^2+a^4q^2}}\mathrm{PF}_1$$

$$\mathrm{F_2H_2}=\frac{|b^2p(-c)+0-a^2b^2|}{\sqrt{b^4p^2+a^4q^2}}=\frac{ab^2\left|-\dfrac{c}{a}p-a\right|}{\sqrt{b^4p^2+a^4q^2}}=\frac{ab^2}{\sqrt{b^4p^2+a^4q^2}}\mathrm{PF}_2$$

である．よって

$$\mathrm{PF_1:F_1H_1=PF_2:F_2H_2}\ \text{すなわち}\ \triangle\mathrm{F_1PH_1}\backsim\triangle\mathrm{F_2PH_2}\qquad\cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

が成り立ち

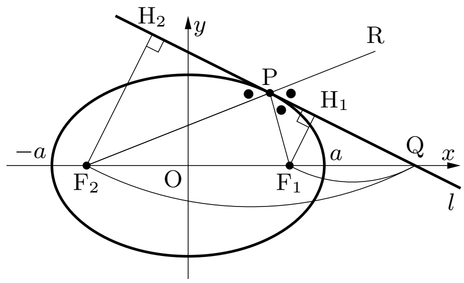
$$\angle\mathrm{F_1PH_1}=\angle\mathrm{F_2PH_2}\qquad\cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

- $-a<p<a$ であり，点 P が $(0,\ \pm b)$ のとき，l は x 軸と平行であり，$\triangle\mathrm{PF_1F_2}$ は $\mathrm{PF_1=PF_2}$ の二等辺三角形であり，$\angle\mathrm{F_1PH_1}=\angle\mathrm{F_2PH_2}$ は成り立つ．

  点 P が $(0,\ \pm b)$ でないときを考える．楕円 C は x 軸，y 軸に関して対称であるから，点 P は第 1 象限にあるとしてよい．

  接線 l と x 軸との交点を Q とおき，線分 $\mathrm{F_2P}$ の P の側への延長上に点 R をとる．



$$\angle\mathrm{F_1PH_1}=\angle\mathrm{F_2PH_2}\qquad\cdots\cdots(*)$$

を示すには

$$\angle\mathrm{F_1PH_1}=\angle\mathrm{RPH_1}$$

であること，すなわち

$$\mathrm{PF_1:PF_2=QF_1:QF_2}$$

が成り立つことを示せばよい．

  Q の座標は $\left(\dfrac{a^2}{p},\ 0\right)$ であり，解答前半の議論より

$$\mathrm{PF_1:PF_2}=\left(a-\frac{c}{a}p\right):\left(a+\frac{c}{a}p\right)=(a^2-cp):(a^2+cp)$$

$$\mathrm{QF_1:QF_2}=\left(\frac{a^2}{p}-c\right):\left(\frac{a^2}{p}+c\right)=(a^2-cp):(a^2+cp)$$

であり

$$\mathrm{PF_1:PF_2=QF_1:QF_2}$$

が成り立つから，$(*)$ は示された．