楕円 $C : 4x^2+y^2=4$ と直線 $l : 2x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ は 2 点 A$(0,\ -2)$ と B で交わるとき，点 B の座標は $\boxed{(1)}$ である．また，楕円 C 上の点を P とするとき，点 P と直線 l の距離が最大となるときの点 P の座標は $\boxed{(2)}$ である．

(22 福岡大 医 2(1))

【答】

(1)	(2)
$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$	$\left(\dfrac{1}{2},\ \sqrt{3}\right)$

【解答】

$$C : 4x^2+y^2=4$$

$$l : 2x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$$

C と l の交点は

$$\begin{cases} 2x=-\sqrt{3}(y+2) \\ 3(y+2)^2+y^2=4 \end{cases}$$

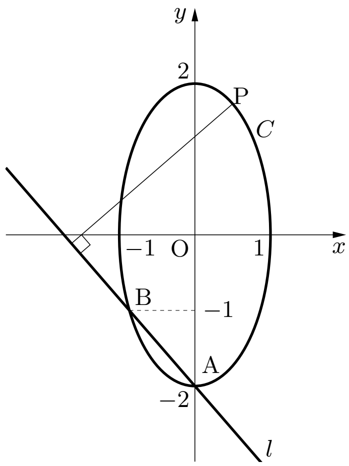
第 2 式を解くと

$$4y^2+12y+8=0$$
$$y^2+3y+2=0$$
$$(y+1)(y+2)=0$$
$$\therefore\quad y=-1,\ -2$$

$y=-1$ のとき，$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，点 B の座標は

$$\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



また，C 上の点 P$(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \\ 0\leqq\theta<2\pi \end{cases}$$

と表すことができる．このとき，点 P と l の距離 L は

$$L=\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+2\sqrt{3}|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\left|2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\right|$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$-2+\sqrt{3}\leqq 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\leqq 2+\sqrt{3}$$

$2+\sqrt{3}-|-2+\sqrt{3}|=2\sqrt{3}>0$ なので，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ のとき最大となる．このとき

$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

である．よって，L が最大となる P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{3}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．