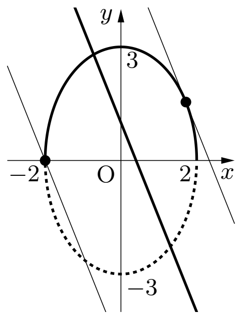
実数 x, y ($y \geqq 0$) が $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を満たすとき，$5x+2y$ のとりうる値の範囲は $m \leqq 5x+2y \leqq M$ となる．$\sqrt{M^2-m^2}$ の値を求めよ．

(22 自治医大 10)

【答】 6

【解答】

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (y \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$



$5x+2y=k$ …… ② とおき，楕円の上側 ① と直線 ② が共有点をもつための実数 k の値の範囲を求める．

点 $(-2,\ 0)$ を通るとき k は最小となる．最小値 m は

$$5\cdot(-2)+2\cdot 0=m$$
$$\therefore\quad m=-10$$

また，接するとき k は最大となる．① と ② を連立すると

$$9x^2+4\left(-\frac{5}{2}x+\frac{k}{2}\right)^2=36$$
$$\therefore\quad 34x^2-10kx+k^2-36=0$$

接するのは (判別式) $=0$ のときであるから

$$(5k)^2-34(k^2-36)=0$$
$$-9k^2+34\cdot 36=0$$
$$\therefore\quad k^2=34\cdot 4$$

接点は第 1 象限にあるから $k>0$ であり，k の最大値 M は

$$M=2\sqrt{34}$$

である．

よって

$$\sqrt{M^2-m^2}=\sqrt{136-100}=\mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 楕円の上側 ① 上の点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \end{cases}$$

とおくことができる．このとき

$$\begin{aligned} 5x+2y &= 10\cos\theta+6\sin\theta \\ &= 2\sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin\theta+\frac{5}{\sqrt{34}}\cos\theta\right) \\ &= 2\sqrt{34}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，$\sin\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ を満たす角である．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \pi+\alpha$ であり，$5x+2y$ は

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

最大値 $M=2\sqrt{34}\times 1=2\sqrt{34}$

$\theta+\alpha=\pi+\alpha$ のとき

最小値 $m=2\sqrt{34}\times\left(-\dfrac{5}{\sqrt{34}}\right)=-10$

をとる．よって

$$\sqrt{M^2-m^2}=\sqrt{136-100}=6$$

である．