座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 4$ と点 P(6, 0) がある．円 C 上を点 A$(2a,\ 2b)$ が動くとき，線分 AP の中点を M とし，線分 AP の垂直二等分線を l とする．

(1) 点 M の軌跡の方程式を求め，その軌跡を図示せよ．
(2) 直線 l の方程式を $a,\ b$ を用いて表せ．
(3) 直線 l が通過する領域を表す不等式を求め，その領域を図示せよ．

(22 上智大 理工 4)

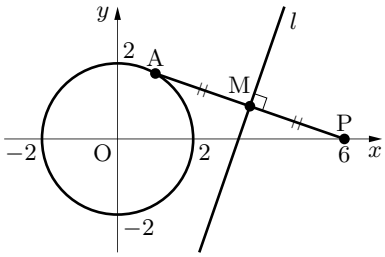
【答】

(1) $(x-3)^2 + y^2 = 1$，図は略．
(2) $(a-3)x + by = -8$
(3) $(x-3)^2 - \dfrac{y^2}{8} \leqq 1$，図は略．

【解答】

$$C : x^2 + y^2 = 4$$

(1) A$(2a,\ 2b)$，P(6, 0) に対し，線分 AP の中点 M の座標を $(x,\ y)$ とおくと



$$\begin{cases} x = \dfrac{2a+6}{2} \\ y = \dfrac{2b}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad ① \begin{cases} x = a+3 \\ y = b \end{cases}$$

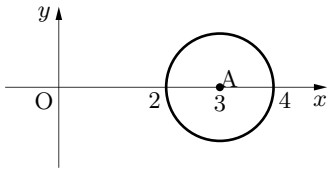
A$(2a,\ 2b)$ は円 C 上の点であるから

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 4$$
$$\therefore \quad a^2 + b^2 = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす．点 M の軌跡は「① かつ ②」を満たす実数 $a,\ b$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

「① かつ ②」

$$\iff \begin{cases} a = x-3 \\ b = y \end{cases} \text{ かつ } a^2 + b^2 = 1$$



であるから，求める方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + y^2 = 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．すなわち，M の軌跡は中心 (3, 0)，半径 1 の円であり，右図となる．

(2) 直線 l 上の点 Q の座標を $(x,\ y)$ とおくと，AQ = QP より

$$(x-2a)^2 + (y-2b)^2 = (x-6)^2 + y^2$$
$$(4a-12)x + 4by = 4a^2 + 4b^2 - 36$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{(a-3)x + by = -8} \quad (\because ②) \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 直線 l の通過領域は「② かつ ③」を満たす実数 a, b が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$「② \text{ かつ } ③」 \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 & \cdots\cdots ② \\ xa+yb-3x+8=0 & \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

ab 平面で考える．

$x=y=0$ のとき ③′ は成立しないので，③′ は ab 平面で直線を表す．

よって，円②と直線 ③′ が共有点をもつ条件は

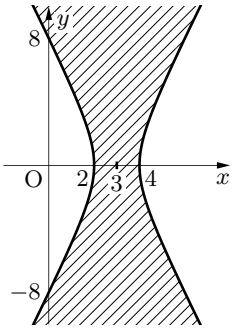
$$(\text{中心と直線との距離}) \leqq (\text{半径})$$

であり

$$\frac{|-3x+8|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1 \iff (-3x+8)^2 \leqq x^2+y^2$$

$$8x^2-48x-y^2+64 \leqq 0$$

$$8(x-3)^2-y^2 \leqq 8$$

$$\boldsymbol{(x-3)^2-\frac{y^2}{8} \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

図示すると右図の斜線部分となる．境界も含む．