$a,\ h$ を正の実数とする．座標平面において，原点 O からの距離が，直線 $x=h$ からの距離の a 倍であるような点 P の軌跡を考える．点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$x,\ y$ は次の方程式を満たす．

$$(1-\boxed{\text{ア}})x^2+2\boxed{\text{イ}}x+y^2=\boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，座標平面の原点 O を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標を考える．点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする．$r \leqq h$ を満たすとき，点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を $a,\ h,\ \theta$ を用いて表すと

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\cos\theta,\ \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sin\theta\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

① から，$a=\boxed{\text{カ}}$ のとき，点 P の軌跡は放物線 $x=\boxed{\text{キ}}y^2+\boxed{\text{ク}}$ となる．この放物線と y 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=2\int_0^{\boxed{\text{ケ}}}x\,dy=2\int_0^{\boxed{\text{ケ}}}(\boxed{\text{キ}}y^2+\boxed{\text{ク}})\,dy=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}h^2$$

である．したがって，② を利用すれば，置換積分法により次の等式が成り立つことがわかる．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

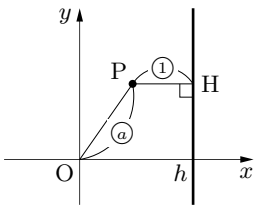
(22 明治大 理工・総合数理・政治経済 3)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
a^2	a^2h	a^2h^2	ah	$1+a\cos\theta$	1	$-\frac{1}{2h}$	$\frac{h}{2}$	h	2	3	1	3

【解答】

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から直線 $x=h$ におろした垂線の足を $\mathrm{H}(h,\ y)$ とおくと，$\mathrm{OP}=a\mathrm{PH}$ より，P の軌跡を表す方程式は



$$x^2+y^2=a^2(x-h)^2$$

$$\therefore\quad (1-\boldsymbol{a^2})x^2+2\boldsymbol{a^2h}x+y^2=\boldsymbol{a^2h^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$\cdots\cdots$(答)

である．

次に，点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$r \leqq h$ のとき $\mathrm{PH}=h-r\cos\theta$ であるから，$\mathrm{OP}=a\mathrm{PH}$ は

$$r=a(h-r\cos\theta)$$

$$(1+a\cos\theta)r=ah$$

$$\therefore\quad r=\frac{ah}{1+a\cos\theta}$$

したがって

$$(x,\ y)=\left(\boldsymbol{\frac{ah}{1+a\cos\theta}}\cos\theta,\ \frac{ah}{1+a\cos\theta}\sin\theta\right) \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

① の方程式が放物線を表すのは，$1-a^2=0$ のときである．これは $a>0$ より

$$a=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

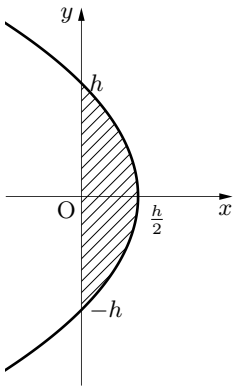
のときであり，(1) に代入すると

$$2hx+y^2=h^2$$

$$\therefore\quad x=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{h}}y^2+\frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

この放物線は，$y=\pm h$ で y 軸と交わり x 軸に関して対称であるから，この放物線と y 軸で囲まれた図形の面積 S は



$$S=2\int_0^{\boldsymbol{h}} x\,dy \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$=2\int_0^h\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{h}}y^2+\frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}\right)dy \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$=\left[-\frac{y^3}{3h}+hy\right]_0^h$$

$$=-\frac{h^2}{3}+h^2$$

$$=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}h^2 \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

一方，$a=1$ のとき，② より，$x=\dfrac{h\cos\theta}{1+\cos\theta}$，$y=\dfrac{h\sin\theta}{1+\cos\theta}$ である．

$$dy=h\cdot\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)-\sin\theta(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=h\cdot\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\frac{h}{1+\cos\theta}\,d\theta$$

y	0	$\longrightarrow$	h
θ	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

であるから，置換積分法により

$$S=2\int_0^h x\,dy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{h}{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h^2\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta \qquad \cdots\cdots ④$$

したがって，③, ④ より

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h^2\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=\frac{2}{3}h^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つことがわかる．