平面上の平行四辺形 OACB において，辺 AC の中点を M とする．辺 OA の長さが 8，辺 OB の長さが 6，線分 BM の長さが 7，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
(2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ．
(3) 平行四辺形 OACB の面積 S を求めよ．
(4) 平行四辺形 OACB の周および内部にある点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 60$$

を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲の面積 T を求めよ．

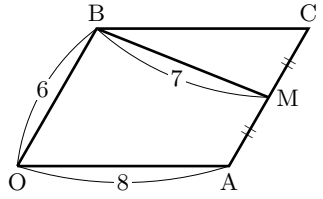
(22 宇都宮大 地デ・工・農 1)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 24$
(3) $S = 24\sqrt{3}$
(4) $T = 24\sqrt{3} - 6\pi$

【解答】

(1) 始点を O にとると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\because \text{ M は AC の中点}) \\ &= \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{2} - \vec{b} \\ &= \boldsymbol{\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

(2) BM $= 7$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2 = 49$ …… ① である．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2 &= \left|\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right|^2 \quad (\because (1)) \\ &= |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= 8^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4} \times 6^2 \\ &= 73 - \vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

であるから

$$① \iff 73 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 49 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = 24} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 平行四辺形 OACB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \sqrt{8^2\times 6^2 - 24^2} \quad (\because\ (2)) \\ &= \sqrt{(48+24)(48-24)} \\ &= \sqrt{72\times 24} \\ &= \mathbf{24\sqrt{3}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とおくと

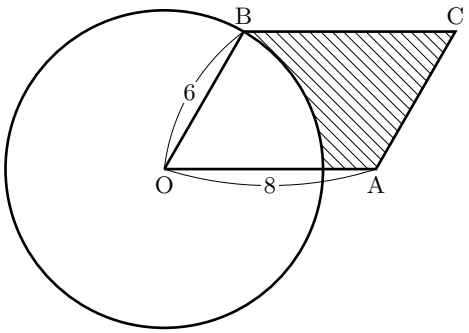
$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) + (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p} \\ &= |\vec{p}|^2 - (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p} + \vec{a}\cdot\vec{b} + (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p} \\ &= |\vec{p}|^2 + 24 \end{aligned}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 60 \iff |\vec{p}|^2 + 24 \geqq 60$$

$$\therefore\quad |\vec{p}| \geqq 6$$

よって，点 P の存在範囲は，O を中心とする半径 6 の円の周および外部と平行四辺形の周および内部の共通部分であり，右図の斜線部分である．



$$\begin{aligned} \cos\angle\mathrm{AOB} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{24}{8\times 6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$$

であるから，求める面積 T は

$$\begin{aligned} T &= S - \frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{\pi}{3} \\ &= \mathbf{24\sqrt{3} - 6\pi} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

- (4) で $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ を求めるならば，(3) でこれを求めておいて，(3) の面積 S を

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3} = 8\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

として求めてもよい．