4 点 O，A，B，C が $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ を $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) △ABC の外接円の中心が O に一致する場合を考える．その外接円の半径が 1 であるとき，辺 BC と辺 AC の長さを求めよ．

(3) (2) のとき，△ABC の面積を求めよ．

(22 東京海洋大 生命・資源 5)

【答】

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\dfrac{9}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\dfrac{15}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{25}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

(2) $\mathrm{BC}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$\mathrm{AC}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

(3) $\dfrac{6}{5}$

【解答】

$$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① より

$$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-5\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

両辺の大きさを 2 乗すると

$$|4\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$
$$16|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+30\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+25|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

よって

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\frac{9}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\frac{15}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{25}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) O が △ABC の外接円の中心であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$$

である．したがって，② より

$$1=\frac{9}{16}+\frac{15}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{25}{16}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{8}{15}\left(1-\frac{34}{16}\right)=-\frac{3}{5}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=1^2-2\left(-\frac{3}{5}\right)+1^2\\&=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\mathrm{BC}=\frac{4\sqrt{5}}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．(1) と同様にして

$$|3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|-4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$
$$9=16+40\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+25$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{40}(9-41)=-\frac{4}{5}$$

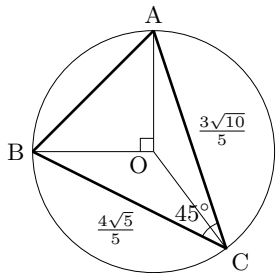
であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \frac{18}{5}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AC} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{10}}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1) と同様にして



$$|5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = |-4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$25 = 16 + 24\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 9$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

$\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ であり，円周角の定理より

$$\angle\mathrm{ACB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB} = 45^\circ$$

である．(2) の結果もあわせると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AC} \times \mathrm{BC}\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{6}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．