平面上の平行四辺形 OACB において辺 OA を 1 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を F とする．また，線分 DC と線分 EF の交点を G とし，直線 OG と線分 AC の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) 平行四辺形 OACB の面積を S としたとき，三角形 HCG の面積を S で表せ．

(22 津田塾大 学芸 2)

【答】

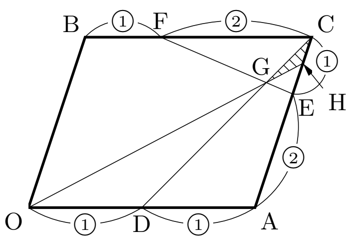
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{13}{15}\vec{a} + \frac{11}{15}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{a} + \frac{11}{13}\vec{b}$

(4) $(\triangle\mathrm{HCG}\ \text{の面積}) = \frac{2}{195}S$

【解答】



(1) OD : DA = 1 : 1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．AE : EC = 2 : 1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．BF : FC = 1 : 2 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) G は線分 DC 上の点なので，実数 s $(0 \leqq s \leqq 1)$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (1-s)\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) + s(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{1+s}{2}\vec{a} + s\vec{b} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表すことができる．

また，G は線分 EF 上の点なので，実数 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}} \\ &= (1-t)\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + t\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}t\right)\vec{a} + \frac{2+t}{3}\vec{b} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すことができる．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので，①，②より

$$\begin{cases}\dfrac{1+s}{2} = 1 - \dfrac{2}{3}t \\ s = \dfrac{2+t}{3}\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}3s + 4t = 3 \\ 3s - t = 2\end{cases}$$

$$\therefore \quad s = \frac{11}{15}, \quad t = \frac{1}{5}$$

である．これらは $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\frac{13}{15}\vec{a} + \frac{11}{15}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- ① 以降は次のように処理してもよい．

  まず，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ で表す．(1) より

$$\begin{cases} 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ \vec{a} + 3\vec{b} = 3\overrightarrow{\mathrm{OF}} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = \frac{9\overrightarrow{\mathrm{OE}} - 6\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{7}, \quad \vec{b} = \frac{-3\overrightarrow{\mathrm{OE}} + 9\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{7}$$

  であり

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1+s}{2}\vec{a} + s\vec{b} \qquad \cdots\cdots ① \\ &= \frac{1+s}{2}\frac{9\overrightarrow{\mathrm{OE}} - 6\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{7} + s\frac{-3\overrightarrow{\mathrm{OE}} + 9\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{7} \\ &= \frac{9+3s}{14}\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{-6+12s}{14}\overrightarrow{\mathrm{OF}} \end{aligned}$$

  G は直線 EF 上の点でもあるから

$$\frac{9+3s}{14} + \frac{-6+12s}{14} = 1$$

$$\frac{3+15s}{14} = 1 \qquad \therefore \quad s = \frac{11}{15}$$

  これは $0 \leqq s \leqq 1$ を満たす．② に $s = \dfrac{11}{15}$ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{13}{15}\vec{a} + \frac{11}{15}\vec{b}$$

  を得る．

(3) H は直線 OG 上の点なので，実数 k を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= \frac{13}{15}k\vec{a} + \frac{11}{15}k\vec{b} \quad (\because \ (2) \text{ の結果式}) \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

と表すことができる．

また，点 H は線分 AC 上の点なので，実数 l $(0 \leqq l \leqq 1)$ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{a} + l\vec{b} \qquad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

と表すことができる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，③，④より

$$\begin{cases} \dfrac{13}{15}k = 1 \\ \dfrac{11}{15}k = l \end{cases} \qquad \therefore \quad k = \frac{15}{13}, \quad l = \frac{11}{13}$$

これは $0 \leqq l \leqq 1$ を満たしている．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\vec{a} + \frac{11}{13}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- ③ 以降は次のようの処理してもよい．
  $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{a} + \vec{b}$ より $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \vec{a}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{13}{15}k\vec{a} + \frac{11}{15}k\vec{b} \qquad \cdots\cdots ③\\ &= \frac{13}{15}k\vec{a} + \frac{11}{15}k(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \vec{a})\\ &= \frac{2}{15}k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{11}{15}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

  H は直線 AC 上の点でもあるから

$$\frac{2}{15}k + \frac{11}{15}k = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{15}{13}$$

  ③ に $k = \dfrac{15}{13}$ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{a} + \frac{11}{13}\vec{b}$$

  を得る．

(4) (2) の $s = \dfrac{11}{15}$ より　DG : GC $= s : (1-s) = 11 : 4$

(3) の $l = \dfrac{11}{13}$ より　AH : HC $= l : 1-l = 11 : 2$

であるから

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{HCG}\text{ の面積}) &= \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{GC}} \times \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{HC}}(\triangle\mathrm{ACD}\text{ の面積})\\ &= \frac{4}{15} \times \frac{2}{13} \times \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{ACO}\text{ の面積})\\ &= \frac{4}{15} \times \frac{2}{13} \times \frac{1}{2} \times \frac{S}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{195}S} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．