

平面上に点 O, A, B, C, D があり, $OA = 2, OB = 3, \vec{OC} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$, $OC = \sqrt{15}$ を満たすとする. また, 線分 OB 上に点 H があり, \vec{OB} と \vec{DH} は直交しているとする. さらに, 線分 OD の中点を M , 線分 BM と線分 DH の交点を P とするとき, $\vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{3}{4}\vec{OD}$, $DP = 3$ を満たすとする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ.
- (2) $\triangle OBC$ の面積を求めよ.
- (3) 内積 $\vec{OB} \cdot \vec{OD}$ を求めよ.
- (4) 線分 OD の長さを求めよ.
- (5) $DP : PH$ を求めよ.

(22 山形大 医・理・農・人文 3)

【答】

- (1) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 5$
- (2) $\triangle OBC = \frac{3}{2}\sqrt{11}$
- (3) $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 6$
- (4) $OD = 2\sqrt{5}$
- (5) $DP : PH = 3 : 1$

【解答】

- (1) $OA = 2, OB = 3, \vec{OC} = 3\vec{OA} - \vec{OB}, OC = \sqrt{15}$ より

$$\begin{aligned} |\vec{OC}|^2 &= |3\vec{OA} - \vec{OB}|^2 \\ 15 &= 9 \times 4 - 6\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 9 \\ \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= 5 \end{aligned}$$

……(答)

である.

- (2) $\triangle OBC = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{OB}|^2|\vec{OC}|^2 - (\vec{OB} \cdot \vec{OC})^2}$

ここで

$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{OC} &= \vec{OB} \cdot (3\vec{OA} - \vec{OB}) = 3 \times 5 - 9 \quad (\because (1)) \\ &= 6 \end{aligned}$$

であるから

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}\sqrt{9 \times 15 - 6^2} = \frac{3}{2}\sqrt{11}$$

……(答)

である.

- (3) $\vec{OB} \perp \vec{DH}$ であり, P は線分 DH 上の点であるから

$$\vec{OB} \perp \vec{DP}$$

である. $\vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{3}{4}\vec{OD}$ より

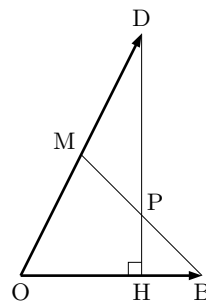
$$\vec{OB} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{3}{4}\vec{OD}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \times 9 - \frac{3}{4}\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 0$$

よって

$$\vec{OB} \cdot \vec{OD} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 6$$

……(答)



である.

(4) $DP = 3$ より

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{3}{4}\vec{OD} \right|^2 &= 3^2 \\ \frac{1}{4} \times 9 - \frac{3}{4} \times 6 + \frac{9}{16} |\vec{OD}|^2 &= 9 \\ \frac{9}{16} |\vec{OD}|^2 &= 9 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

よって

$$OD = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(5) $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = OB \times OH$ より

$$\begin{aligned} 3 \times OH &= 6 \quad \therefore OH = 2 \\ \therefore DH &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4 \end{aligned}$$

よって

$$DP : PH = 3 : (DH - DP) = 3 : (4 - 3) = 3 : 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.