座標空間において，原点 O と点 A$(1,\ 0,\ -1)$ と点 B$(0,\ 5,\ 0)$ がある．実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を ℓ とする．また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 P$(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する．ℓ 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる．このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ．

(2) 曲線 C 上の点 R と ℓ 上の点 S のうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ．また，そのときの $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ の値を求めよ．

(22 千葉大 6)

【答】

(1) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$

(2) $\mathrm{R}\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2},\ \dfrac{19}{4},\ 0\right)$, $\mathrm{S}\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\dfrac{\sqrt{19}}{4}\right)$ (複号同順) のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$

【解答】

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ -1),\quad \mathrm{B}(0,\ 5,\ 0)$$

$$\ell : \overrightarrow{\mathrm{OX}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (t \text{ は実数})$$

$$C : y=x^2,\ z=0$$

(1) ℓ 上の点 Q は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(1,\ 0,\ -1)+(0,\ 5,\ 0)=(t,\ 5,\ -t)$$

と表すことができ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．P$(a,\ a^2,\ 0)$ は固定されており

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=(1,\ 0,\ -1)\cdot\{(t,\ 5,\ -t)-\left(a,\ a^2,\ 0\right)\}\\&=(t+0+t)-(a+0+0)\\&=2t-a\end{aligned}$$

であるから，① より

$$2t-a=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{a}{2}$$

であり，点 Q の座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ 5,\ -\frac{a}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 曲線 C 上の点 R の座標は $(a,\ a^2,\ 0)$，ℓ 上の点 S の座標は $(t,\ 5,\ -t)$ とおくことができる．R を固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ が最小となるのは $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\perp\ell$ のときであり，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である．(1) より，これを満たすのは

$$t=\frac{a}{2}\text{のときであり}, \mathrm{S}\left(\frac{a}{2},\ 5,\ -\frac{a}{2}\right)$$

となる．このとき

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2 &= \left(a-\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-5)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&= a^4-\frac{19}{2}a^2+25 \\
&= \left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}
\end{aligned}
$$

となる．よって，$a^2=\dfrac{19}{4}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2$ は最小値 $\dfrac{39}{16}$ をとる．

すなわち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ は

$$
\mathbf{R}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0\right),\ \mathbf{S}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}\right)\ \textbf{(複号同順) のとき，最小値}\ \frac{\sqrt{39}}{4}
$$

……(答)

をとる．

- (1) を無視して次のようにしてもよい．

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2 &= |(t,\ 5,\ -t)-\big(a,\ a^2,\ 0\big)|^2 \\
&= (t-a)^2+(5-a^2)^2+(-t-0)^2 \\
&= (t^2-2at+a^2)+(25-10a^2+a^4)+t^2 \\
&= 2t^2-2at+a^4-9a^2+25 \\
&= 2\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+a^4-\frac{19}{2}a^2+25 \\
&= 2\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}
\end{aligned}
$$

であり，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2$ は

$$
\begin{cases} t=\dfrac{a}{2} \\ a^2=\dfrac{19}{4} \end{cases}\ \text{すなわち}\ a=\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ t=\pm\frac{\sqrt{19}}{4}\ \text{(複号同順) のとき，最小値}\ \frac{39}{16}
$$

をとる．

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ は

$$
\mathrm{R}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0\right),\ \mathrm{S}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}\right)\ \text{(複号同順) のとき，最小値}\ \frac{\sqrt{39}}{4}
$$

をとる．