xyz 空間に 4 点 A(0, 3, 2)，B(−3, 4, 0)，C(3, 1, 0)，D(−1, 2, 1) がある．2 点 A，D を通る直線と xy 平面の交点を E とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 E の座標を求めよ．
(2) $\sin\angle\mathrm{BCE}$ の値を求めよ．
(3) 三角形 BCE の面積を求めよ．
(4) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

(22 山形大 工 2)

【答】

(1) E(−2, 1, 0)

(2) $\sin\angle\mathrm{BCE} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3) $\dfrac{15}{2}$

(4) $\dfrac{5}{2}$

【解答】

(1) E は直線 AD 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= (0,\ 3,\ 2) + t(-1,\ -1,\ -1)\end{aligned}$$

と表すことができる．E は xy 平面上の点でもあるから，z 成分は 0 であり

$$2 - t = 0 \qquad \therefore \quad t = 2$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (0,\ 3,\ 2) + 2(-1,\ -1,\ -1) = (-2,\ 1,\ 0)$$

であり，点 E の座標は

$$\mathbf{E(-2,\ 1,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-6,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = (-5,\ 0,\ 0)$ より

$$\cos\angle\mathrm{BCE} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|} = \frac{30+0+0}{\sqrt{36+9+0}\times 5} = \frac{30}{3\sqrt{5}\times 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

であるから

$$\sin\angle\mathrm{BCE} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

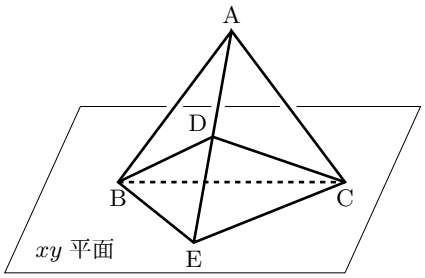
である．

(3) △BCE の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CB}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\sin\angle\mathrm{BCE} = \frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 5\times\frac{\sqrt{5}}{5} = \boldsymbol{\frac{15}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (1) から，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，すなわち D は AE の中点である．また，3 点 B，C，E は xy 平面上にあることから



$$
\begin{aligned}
&(\text{四面体 ABCD の体積}) \\
&= \frac{1}{2} \times (\text{四面体 ABCE の体積}) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times S \times |\text{A の } z \text{ 成分}| \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 2 \right) \\
&= \boldsymbol{\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．