原点を O とする座標空間に，4 点 A(1, 2, 1)，B(2, -1, -3)，C(1, 1, 1)，D(3, 2, -1) がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 三角形 OAB の面積を求めよ．

(2) 2 点 O，A を通る直線を L_1，2 点 O，B を通る直線を L_2 とする．直線 L_1 上に点 E，直線 L_2 上に点 F をとる．ここで，点 E と点 F は異なるとする．いま，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は垂直で，2 点 E，F を通る直線 L_3 が点 D を通るとする．次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 直線 L_3 と xy 平面との交点の座標を求めよ．

(ii) 点 B と直線 L_3 上の点との距離の最小値を求めよ．

(22 札幌医大 2)

【答】

(1) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(2) (i) (2, 2, 0)　　(ii) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

【解答】

A(1, 2, 1)，B(2, -1, -3)，C(1, 1, 1)，D(3, 2, -1)

(1) △OAB の面積は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(1+4+1)\times(4+1+9)-(2-2-3)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{6\times 14-9}\\
&=\frac{\sqrt{75}}{2}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) E は 2 点 O，A を通る直線 L_1 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(1,\ 2,\ 1),$$

F は 2 点 O，B を通る直線 L_2 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(2,\ -1,\ -3)$$

と表すことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は垂直であるから

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\\
&\{t(2,\ -1,\ -3)-s(1,\ 2,\ 1)\}\cdot(1,\ 1,\ 1)=0\\
&t(2-1-3)-s(1+2+1)=0\\
&-2t-4s=0\\
&\therefore\quad t=-2s \qquad \cdots\cdots\ ①
\end{aligned}$$

また，2 点 E，F を通る直線 L_3 が点 D を通るから，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{EF}}$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}
(3,\ 2,\ -1)&=s(1,\ 2,\ 1)+u(2t-s,\ -t-2s,\ -3t-s)\\
&=s(1,\ 2,\ 1)+u(-5s,\ 0,\ 5s)\quad(\because\ ①)\\
&=s(1,\ 2,\ 1)+su(-5,\ 0,\ 5) \qquad \cdots\cdots\ ②\\
&=s(1-5u,\ 2,\ 1+5u)
\end{aligned}$$

y 成分を比較すると

$$2 = 2s \qquad \therefore \quad s = 1 \qquad \therefore \quad t = -2 \quad (\because \ ①)$$

したがって，直線 L_3 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は

$$(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 1) + u(-5,\ 0,\ 5) \quad (\because \ ②)$$

と表すことができる．

(i) 直線 L_3 と xy 平面との交点の座標は，(z 成分) $= 0$ より

$$1 + 5u = 0 \qquad \therefore \quad u = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \mathbf{(2,\ 2,\ 0)}$$ ……(答)

である．

(ii) 直線 L_3 上の点を P とおくと，u を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \{(1,\ 2,\ 1) + u(-5,\ 0,\ 5)\} - (2,\ -1,\ -3) \\ &= (-1,\ 3,\ 4) + u(-5,\ 0,\ 5)\end{aligned}$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 &= (-1-5u)^2 + 3^2 + (4+5u)^2 \\ &= 50u^2 + 50u + 26 \\ &= 50\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ は

$$u = -\frac{1}{2} \text{ のとき，最小値} \sqrt{\frac{27}{2}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$$ ……(答)

をとる．

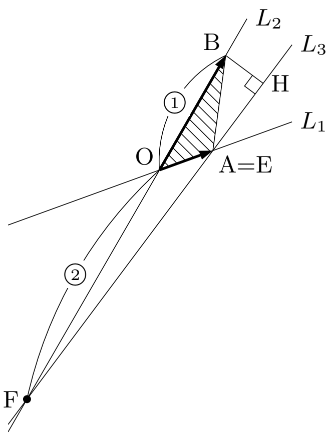
- (1) の面積と (2) の関係を考えてみる．

(2) の $s = 1,\ t = -2$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 1\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-4,\ 2,\ 6)$$

であり，点 B から直線 L_3 に下ろした垂線の足を H とおくと，E，F，H は右図となる．



$$(\triangle\mathrm{ABF} \text{ の面積}) = 3(\triangle\mathrm{OAB} \text{ の面積})$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AF} \times \mathrm{BH} = 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad (\because \ (1))$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}(=\overrightarrow{\mathrm{EF}}) &= (-4,\ 2,\ 6) - (1,\ 2,\ 1) \\ &= (-5,\ 0,\ 5)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{AF}}|(=|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|) = 5\sqrt{2}$$

であるから

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \mathrm{BH} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{BH} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

である．