原点を O とする座標空間に 4 点 A(0, 0, 5)，B(4, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D(5, 4, 0) をとる．△ABO，△ACO，△ACD の重心をそれぞれ G，H，I とする．次の問いに答えなさい．

(1) G，H，I の座標をそれぞれ求めなさい．また，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ の内積を求めなさい．

(2) 線分 BD を 1 : 2 に内分する点を E とする．直線 AE 上の点 P が 3 点 G，H，I と同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を成分で表しなさい．

(3) 線分 AD を 3 : 2 に内分する点を F とする．線分 BF 上に点 Q があり，△QAB，△QBD，△QDA の面積比が 3 : 2 : 5 であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を成分で表しなさい．

(22 秋田大 理工・教文・国資 4)

【答】

(1) $\mathrm{G}\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{5}{3}\right)$，$\mathrm{H}\left(0,\ 1,\ \frac{5}{3}\right)$，$\mathrm{I}\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HI}}=-\frac{8}{9}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\frac{26}{9},\ \frac{8}{9},\ -\frac{10}{3}\right)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\frac{7}{2},\ \frac{6}{5},\ -4\right)$

【解答】

(1) G，H，I はそれぞれ △ABO，△ACO，△ACD の重心なので，それぞれの座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{0+4+0}{3},\ \frac{0+0+0}{3},\ \frac{5+0+0}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{G}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{0},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{0+0+0}{3},\ \frac{0+3+0}{3},\ \frac{5+0+0}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{H}\left(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\mathrm{I}\left(\frac{0+0+5}{3},\ \frac{0+3+4}{3},\ \frac{5+0+0}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{I}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．これより

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\left(0,\ 1,\ \frac{5}{3}\right)-\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3},\ 1,\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right)-\left(0,\ 1,\ \frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ 0\right)$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{5}{3}+1\times\frac{4}{3}+0\times 0=\boldsymbol{-\frac{8}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) E は線分 BD を 1 : 2 に内分する点なので

$$\mathrm{E}\left(\frac{2\times 4+1\times 5}{1+2},\ \frac{2\times 0+1\times 4}{1+2},\ \frac{2\times 0+1\times 0}{1+2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{E}\left(\frac{13}{3},\ \frac{4}{3},\ 0\right)$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(\frac{13}{3},\ \frac{4}{3},\ 0\right)-(0,\ 0,\ 5)=\left(\frac{13}{3},\ \frac{4}{3},\ -5\right)$$

である．

P は直線 AE 上にあるから，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(0,\ 0,\ 5)+k\left(\frac{13}{3},\ \frac{4}{3},\ -5\right)$$

$$=\left(\frac{13}{3}k,\ \frac{4}{3}k,\ 5-5k\right)$$

と表すことができる．さらに，P が平面 GHI : $z=\frac{5}{3}$ 上にもあるので

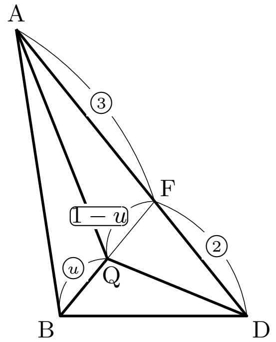
$$5-5k=\frac{5}{3} \quad \text{すなわち} \quad k=\frac{2}{3}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\boldsymbol{\frac{26}{9}},\ \boldsymbol{\frac{8}{9}},\ \boldsymbol{-\frac{10}{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) AF : FD = 3 : 2 であり，Q は線分 BF 上の点であるから，BQ : QF $= u : 1-u\ (0 \leqq u \leqq 1)$ とすると



$$\triangle\mathrm{QAB} = u\triangle\mathrm{FAB} = \frac{3}{5}u\triangle\mathrm{ABD}$$
$$\triangle\mathrm{QBD} = u\triangle\mathrm{FBD} = \frac{2}{5}u\triangle\mathrm{ABD}$$
$$\triangle\mathrm{QDA} = (1-u)\triangle\mathrm{ABD}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
&\triangle\mathrm{QAB} : \triangle\mathrm{QBD} : \triangle\mathrm{QDA} = 3 : 2 : 5 \\
\iff& \frac{3}{5}u : \frac{2}{5}u : (1-u) = 3 : 2 : 5 \\
\iff& 3u : 2u : 5(1-u) = 3 : 2 : 5 \\
\iff& \begin{cases} 3u : 2u = 3 : 2\ (\text{つねに成立}) \\ 2u : 5(1-u) = 2 : 5 \end{cases} \\
\iff& 10(1-u) = 10u \\
&\therefore\quad u = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である．よって，Q は線分 BF の中点であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \frac{1}{10}(5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

である．ここで

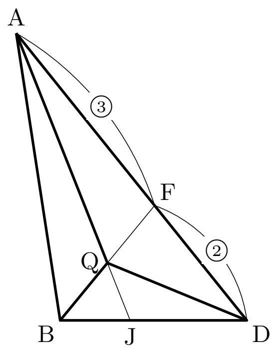
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ 5) = (4,\ 0,\ -5)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (5,\ 4,\ 0) - (0,\ 0,\ 5) = (5,\ 4,\ -5)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \frac{1}{10}\{5(4,\ 0,\ -5) + 3(5,\ 4,\ -5)\} \\
&= \frac{1}{10}(35,\ 12,\ -40) \\
&= \left(\boldsymbol{\frac{7}{2}},\ \boldsymbol{\frac{6}{5}},\ \boldsymbol{-4}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- AQ の延長と BD の交点を J とすると



$$\mathrm{BJ} : \mathrm{JD} = \triangle\mathrm{QAB} : \triangle\mathrm{QDA} = 3 : 5$$

であり，△JDA と直線 BF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QJ}} \times \frac{\mathrm{JB}}{\mathrm{BD}} \times \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}} = 1$$
$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QJ}} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = 1$$
$$\therefore\quad \mathrm{AQ} : \mathrm{QJ} = 4 : 1$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{8} = \frac{1}{10}(5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

以下，解答と同じである．