1辺の長さ4の立方体 ABCD–EFGH において，辺 EH 上の点 P を EP : PH = 1 : 3 となるようにとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle \mathrm{APF} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．
(2) 三角形 APF の面積 S を求めよ．
(3) 四面体 AEFP の頂点 E から平面 AFP に下ろした垂線 EI の長さを求めよ．

(22 東北学院大 文系 A 5)

【答】

(1) $\dfrac{1}{17}$
(2) $6\sqrt{2}$
(3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解答】

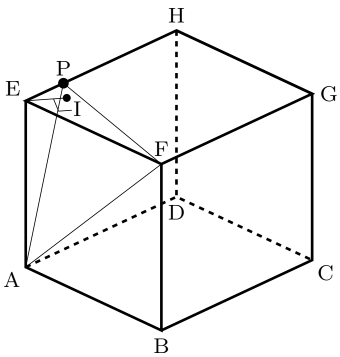
(1) 立方体の1辺の長さが4より

$$\mathrm{AF} = 4\sqrt{2}$$

であり，EP : PH = 1 : 3 より，EP = 1 であるから

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PF} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

である．△APF で余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PF}^2 - \mathrm{AF}^2}{2\cdot\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PF}}\\ &= \frac{(\sqrt{17})^2 + (\sqrt{17})^2 - (4\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}\\ &= \frac{17+17-32}{2\cdot 17}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{17}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) (1) より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{18\cdot 16}}{17} = \frac{12\sqrt{2}}{17}$$

であり，△APF の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{12\sqrt{2}}{17} = \boldsymbol{6\sqrt{2}}$$

……(答)

である．

(3) 四面体 AEFP の体積を2通りに表してみると

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{APF}\cdot\mathrm{EI} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{AEF}\cdot\mathrm{PE}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}\cdot\mathrm{EI} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot 1$$

$$6\sqrt{2}\cdot\mathrm{EI} = 8$$

$$\therefore\quad \mathrm{EI} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

……(答)

である．