$P(x)$ を x についての整式とし，$P(x)P(-x)=P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする．

(1) $P(0)=0$ または $P(0)=1$ であることを示せ．
(2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ．
(3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ．

(23 北海道大 文 1)

【答】
(1) 略
(2) 略
(3) $x^2,\quad x^2-x,\quad x^2-2x+1,\quad x^2+x+1$

【解答】

$$P(x)P(-x)=P(x^2) \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $(*)$ において $x=0$ とおくと

$$P(0)P(0)=P(0)$$
$$P(0)\{P(0)-1\}=0$$
$\therefore\quad P(0)=0$ または $P(0)=1$ …… (証明終わり)

である．

(2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないことより

$$P(1)\fallingdotseq 0$$

である．$(*)$ において $x=1$ とおくと

$$P(1)P(-1)=P(1)$$
$$P(1)\{P(-1)-1\}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$P(-1)-1=0 \quad (\because\ P(1)\fallingdotseq 0)$$

が成り立つ．よって，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる． …… (証明終わり)

(3) 次数が 2 である整式 $P(x)$ を

$$P(x)=ax^2+bx+c\ (a\fallingdotseq 0)$$

と表す．$(*)$ において，辺々の 4 次の係数を比較すると

$$a^2=a \qquad \therefore\quad a(a-1)=0$$
$$\therefore\quad a=1 \quad (\because\ a\fallingdotseq 0)$$

また，(1) より

$c=0$ または $c=1$

$\therefore\quad P(x)=x^2+bx$ または $P(x)=x^2+bx+1$

であることが必要である．

さらに，① より

$P(1)=0$ または $P(-1)=1$ …… ②

である．

(i) $P(x)=x^2+bx$ のとき，② は

$1+b=0$ または $1-b=1$

$b=-1$ または $b=0$

$\therefore\quad P(x)=x^2-x$ または $P(x)=x^2$

(ii) $P(x) = x^2 + bx + 1$ のとき，② は

$$1 + b + 1 = 0 \text{ または } 1 - b + 1 = 1$$

$$b = -2 \text{ または } b = 1$$

$$\therefore \quad P(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ または } P(x) = x^2 + x + 1$$

逆に

$P(x) = x^2 - x$ のとき

$$P(x)P(-x) = (x^2 - x)(x^2 + x) = x^4 - x^2 = P(x^2)$$

$P(x) = x^2$ のとき

$$P(x)P(-x) = x^2 \cdot x^2 = x^4 = P(x^2)$$

$P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ のとき

$$P(x)P(-x) = (x-1)^2(-x-1)^2 = (x^2-1)^2 = P(x^2)$$

$P(x) = x^2 + x + 1$ のとき

$$P(x)P(-x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4+x^2+1 = P(x^2)$$

であり，どれも $(*)$ を満たす．

よって，求める 2 次の整式 $P(x)$ は

$$\boldsymbol{x^2,\quad x^2 - x,\quad x^2 - 2x + 1,\quad x^2 + x + 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 恒等式として係数比較してもよい．

  次数が 2 である整式 $P(x)$ を

  $$P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \fallingdotseq 0)$$

  とおくと，$(*)$ の左辺は

  $$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c) &= (ax^2+c)^2 - b^2x^2 \\ &= a^2x^4 + (2ac-b^2)x^2 + c^2\end{aligned}$$

  であるから

  $$(*) \iff a^2x^4 + (2ac-b^2)x^2 + c^2 = ax^4 + bx^2 + c \qquad \cdots\cdots (**)$$

  である．$(**)$ が x についての恒等式である条件は

  $$\begin{cases} a^2 = a \\ 2ac - b^2 = b \\ c^2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a(a-1) = 0 & \cdots\cdots ㋐ \\ 2ac - b^2 = b & \cdots\cdots ㋑ \\ c(c-1) = 0 & \cdots\cdots ㋒ \end{cases}$$

  $a \fallingdotseq 0$ かつ ㋐, ㋒ より

  $$(a,\ c) = (1,\ 0),\ (1,\ 1)$$

  である．

  (i) $(a,\ c) = (1,\ 0)$ のとき

  $$㋑ \iff b^2 + b = 0$$

  $$\therefore \quad b = 0,\ -1$$

  (ii) $(a,\ c) = (1,\ 1)$ のとき

  $$㋑ \iff b^2 + b - 2 = 0$$

  $$\therefore \quad (b+2)(b-1) = 0 \qquad \therefore \quad b = -2,\ 1$$

  以上より，求める 2 次の整式 $P(x)$ は

  $$x^2,\quad x^2 - x,\quad x^2 - 2x + 1,\quad x^2 + x + 1$$

  である．