実数 $a,\ b$ は二重根号を用いて

$$a=\frac{3}{\sqrt{4+\sqrt{7}}},\quad b=\frac{3}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

と表される．このとき，以下の問いに答えなさい．ただし，求める値は二重根号を用いて表さないこと．

(1) $a^2+b^2,\ ab$ の値を求めなさい．
(2) $a+b,\ a-b$ の値を求めなさい．
(3) $a,\ b$ の値を求めなさい．

(23 福島大 後 食農 2)

【答】
(1) $a^2+b^2=8,\ ab=3$
(2) $a+b=\sqrt{14},\ a-b=-\sqrt{2}$
(3) $a,\ b$

【解答】

$$a=\frac{3}{\sqrt{4+\sqrt{7}}},\quad b=\frac{3}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

(1) 与えられた条件より

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=\frac{9}{4+\sqrt{7}}+\frac{9}{4-\sqrt{7}}\\&=\frac{9(4-\sqrt{7})+9(4+\sqrt{7})}{4^2-7}=\frac{9\cdot 8}{9}=\mathbf{8}\end{aligned}$$ ……(答)

また

$$ab=\frac{9}{\sqrt{4^2-7}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\mathbf{3}$$ ……(答)

である．

(2) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ なので，(1) の結果より

$$(a+b)^2=8+2\cdot 3=14$$

$a+b>0$ なので

$$\boldsymbol{a+b=\sqrt{14}}\qquad\cdots\cdots ①$$ ……(答)

である．

また，$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ なので

$$(a-b)^2=8-2\cdot 3=2$$

$a-b<0$ なので

$$\boldsymbol{a-b=-\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots ②$$ ……(答)

である．

(3) (2) の結果を用いる．

$\dfrac{①+②}{2}$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}}$ ……(答)

$\dfrac{①-②}{2}$ より　$\boldsymbol{b=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}}$ ……(答)

である．

- (1)，(2) を経由せずに，二重根号をはずして a，b を求めることもできる．

$$\sqrt{4 \pm \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{7} \pm 1}{\sqrt{2}} \quad \text{(以上，複号同順)}$$

であるから

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}+1} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{7-1} = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$$

である．