$a,\ b$ を実数とする．複素数 $x=\sqrt{2}+i$ が $x^3+ax+b=0$ の一つの解となるように $a,\ b$ の値を定めよ．

(23 三重大 教育・生資・人文・医 (看) 1(1))

【答】 $a=-5,\ b=6\sqrt{2}$

【解答】

$$x^3+ax+b=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

方程式 ① の係数は実数であり，$\sqrt{2}+i$ が解の一つの解であるから，$\sqrt{2}-i$ も ① の解である．残りの解を α とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(\sqrt{2}+i)+(\sqrt{2}-i)+\alpha=0\\(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)+(\sqrt{2}+i)\alpha+(\sqrt{2}-i)\alpha=a\\(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)\alpha=-b\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\alpha=-2\sqrt{2}\\a=3+2\sqrt{2}\alpha\\b=-3\alpha\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a}=3+2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=\boldsymbol{-5},\quad \boldsymbol{b}=-3\cdot(-2\sqrt{2})=\boldsymbol{6\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．