

$f(x) = x|x+3|$ とする. 方程式 $f(x) = k$ が 1 個の実数解をもつ k の値の範囲を求めなさい.

(23 公立千歳科技大 中期 理工 1(5))

【答】 $k < -\frac{9}{4}$, $0 < k$

【解答】

$$f(x) = x|x+3| \text{ より}$$

$$f(x) = k$$

の実数解は曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の共有点の x 座標である.

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+3) & (x \leq -3 \text{ のとき}) \\ x(x+3) & (-3 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり, $-3 \leq x$ のとき

$$x(x+3) = x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフは右図となる.

$y = k$ との共有点に注意すると, $f(x) = k$ が 1 個の実数解をもつ k の値の範囲は

$$k < -\frac{9}{4}, 0 < k \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

