$P(x)$ を係数が実数である x の整式とする．方程式 $P(x)=0$ は虚数 $1+\sqrt{2}i$ を解にもつとする．

(1) 虚数 $1-\sqrt{2}i$ も $P(x)=0$ の解であることを示そう．

$1\pm\sqrt{2}i$ を解とする x の 2 次方程式で x^2 の係数が 1 であるものは

$$x^2-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}=0$$

である．$S(x)=x^2-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$ とし，$P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，次が成り立つ．

$$P(x)=\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$$

また，$S(x)$ は 2 次式であるから，m, n を実数として，$R(x)$ は

$$R(x)=mx+n$$

と表せる．ここで，$1+\sqrt{2}i$ が二つの方程式 $P(x)=0$ と $S(x)=0$ の解であることを用いれば $R(1+\sqrt{2}i)=\boxed{\text{エ}}$ となるので，$x=1+\sqrt{2}i$ を $R(x)=mx+n$ に代入することにより，$m=\boxed{\text{オ}}$，$n=\boxed{\text{カ}}$ であることがわかる．したがって，$\boxed{\boxed{\text{キ}}}$ であることがわかるので，$1-\sqrt{2}i$ も $P(x)=0$ の解である．

$\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$ の解答群

⓪ $S(x)Q(x)R(x)$	① $S(x)R(x)+Q(x)$
② $R(x)Q(x)+S(x)$	③ $S(x)Q(x)+R(x)$

$\boxed{\boxed{\text{キ}}}$ の解答群

⓪ $P(x)=S(x)R(x)$	① $P(x)=Q(x)R(x)$
② $Q(x)=0$	③ $R(x)=0$
④ $S(x)=Q(x)R(x)$	⑤ $Q(x)=S(x)R(x)$

(2) k, ℓ を実数として

$$P(x)=3x^4+2x^3+kx+\ell$$

の場合を考える．このとき，$P(x)$ を (1) の $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$Q(x)=\boxed{\text{ク}}x^2+\boxed{\text{ケ}}x+\boxed{\text{コ}}$$

$$R(x)=\left(k-\boxed{\text{サシ}}\right)x+\ell-\boxed{\text{スセ}}$$

となる．$P(x)=0$ は $1+\sqrt{2}i$ を解にもつので，(1) の考察を用いると

$$k=\boxed{\text{ソタ}},\quad \ell=\boxed{\text{チツ}}$$

である．また，$P(x)=0$ の $1+\sqrt{2}i$ 以外の解は

$$x=\boxed{\text{テ}}-\sqrt{\boxed{\text{ト}}}i,\quad \frac{-\boxed{\text{ナ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}i}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

であることがわかる．

(23 共通テスト 追・再試験 II・IIB 1[1])

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	スセ	ソタ	チツ	テ
2	3	3	0	0	0	3	3	8	7	10	21	10	21	1

ト	ナ	ニ	ヌ
2	4	5	3

【解答】

(1) $1 \pm \sqrt{2}i$ を解とする x の 2 次方程式で x^2 の係数が 1 であるものは

$$x = 1 \pm \sqrt{2}i \iff (x-1)^2 = (\pm\sqrt{2}i)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = -2$$
$$\therefore \quad x^2 - \mathbf{2}x + \mathbf{3} = 0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $(x - 1 + \sqrt{2}i)(x - 1 - \sqrt{2}i) = 0$ を整理して
$$x^2 - 2x + 3 = 0$$
としてもよい．
- 解と係数の関係を用いてもよい．
$$\begin{cases} (2\text{ 解の和}) = (1-\sqrt{2}i) + (1+\sqrt{2}i) = 2 \\ (2\text{ 解の積}) = (1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i) = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$
より，求める 2 次方程式は
$$x^2 - 2x + 3 = 0$$
である．

$S(x) = x^2 - 2x + 3$ とし，$P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$P(x) = \boldsymbol{S(x)Q(x) + R(x)} \qquad (③) \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．また，$S(x)$ は 2 次式であるから，m，n を実数として，$R(x)$ は

$$R(x) = mx + n$$

と表せる．ここで，$1 + \sqrt{2}i$ が二つの方程式 $P(x) = 0$ と $S(x) = 0$ の解であることを用いれば

$$R(1 + \sqrt{2}i) = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となるので，$x = 1 + \sqrt{2}i$ を $R(x) = mx + n$ に代入することにより

$$m(1 + \sqrt{2}i) + n = 0$$
$$(m + n) + m\sqrt{2}i = 0$$

$m + n$，$m\sqrt{2}$ は実数だから

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ m\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad m = \mathbf{0}, \quad n = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．したがって

$$\boldsymbol{R(x) = 0} \qquad (③) \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかるので，$1 - \sqrt{2}i$ も $P(x) = 0$ の解である．

(2) k, ℓ を実数として

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 + kx + \ell$$

のとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割ると

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 3x^2 & +8x & +7 & & \\
\hline
x^2-2x+3 & 3x^4 & +2x^3 & & +kx & +l \\
 & 3x^4 & -6x^3 & +9x^2 & & \\
\hline
 & & 8x^3 & -9x^2 & +kx & +l \\
 & & 8x^3 & -16x^2 & +24x & \\
\hline
 & & & 7x^2 & +(k-24)x & +l \\
 & & & 7x^2 & -14x & +21 \\
\hline
 & & & & (k-10)x & +l-21
\end{array}
$$

であり，商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は

$$Q(x) = \mathbf{3}x^2 + \mathbf{8}x + \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$R(x) = (k - \mathbf{10})x + \ell - \mathbf{21} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．$P(x) = 0$ は $1 + \sqrt{2}i$ を解にもつので，(1) の考察を用いると，余りは 0 なので

$$\begin{cases} k - 10 = 0 \\ \ell - 21 = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad k = \mathbf{10}, \quad \ell = \mathbf{21} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x^2 + 8x + 7)$$

であり，解は

$$x = 1 \pm \sqrt{2}i, \quad \frac{-4 \pm \sqrt{5}i}{3}$$

である．よって，$P(x) = 0$ の $1 + \sqrt{2}i$ 以外の解は

$$x = \mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}i, \quad \frac{-\mathbf{4} \pm \sqrt{\mathbf{5}}i}{\mathbf{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることがわかる．