$a,\ b$ を実数とする．θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

(23 大阪大 文系 1)

【答】 略

【解答】

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b \qquad \cdots\cdots ①$$

① を変形すると

$$1 - 2\sin^2\theta = a\sin\theta + b$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\theta + a\sin\theta + b - 1 = 0$$

となる．$t = \sin\theta$ とおくと

$$2t^2 + at + b - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

θ についての方程式 ① が実数解をもつ条件は，t についての方程式 ② が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことである．

$f(t) = 2t^2 + at + b - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 + at + b - 1 \\ &= 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1 \end{aligned}$$

であり，求める条件は

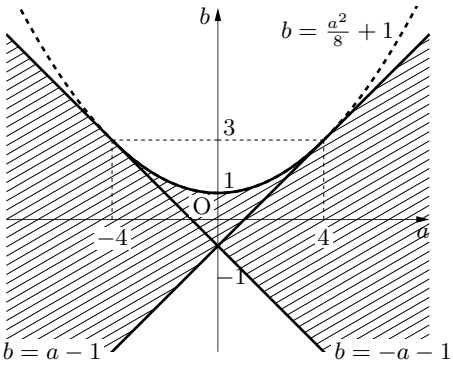
$$\text{(i)}\ f(-1)f(1) \leqq 0 \quad \text{または} \quad \text{(ii)}\ \begin{cases} f(-1) \geqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \\ -1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1 \\ f\left(-\dfrac{a}{4}\right) = -\dfrac{a^2}{8} + b - 1 \leqq 0 \end{cases}$$

が成り立つことである．

$$\text{(i)} \iff (-a+b+1)(a+b+1) \leqq 0$$

2 直線 $-a+b+1 = 0,\ a+b+1 = 0$ は点 $(0,\ -1)$ で交わる．

$$\text{(ii)} \iff \begin{cases} -a+b+1 \geqq 0 \\ a+b+1 \geqq 0 \\ -4 \leqq a \leqq 4 \\ b \leqq \dfrac{a^2}{8} + 1 \end{cases}$$



(i) または (ii) を図示すると，右図の斜線部分となる．境界も含む．

- ② を ab 平面上の直線

$$b = -ta - 2t^2 + 1$$

とみて，t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動くときの直線の通過範囲を求めてもよい．

(別解 1) a を固定するとき

$$\begin{aligned} b &= -2t^2 - at + 1 \\ &= -2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 1 \end{aligned}$$

$g(t) = -2t^2 - at + 1$ とおくと，b のとりうる値の範囲は

(ア) $-\dfrac{a}{4} \leqq -1$ (すなわち $a \geqq 4$) のとき

$$\begin{aligned} & g(-1) \geqq b \geqq g(1) \\ \therefore\quad & a - 1 \geqq b \geqq -a - 1 \end{aligned}$$

(イ) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ (すなわち $4 \geqq a \geqq -4$) のとき

$$\begin{aligned} & \min\{g(-1),\ g(1)\} \leqq b \leqq g\left(-\frac{a}{4}\right) \\ \therefore\quad & \min\{a - 1,\ -a - 1\} \leqq b \leqq \frac{a^2}{8} + 1 \end{aligned}$$

(ウ) $1 \leqq -\dfrac{a}{4}$ (すなわち $-4 \geqq a$) のとき

$$\begin{aligned} & g(-1) \leqq b \leqq g(1) \\ \therefore\quad & a - 1 \leqq b \leqq -a - 1 \end{aligned}$$

(ア) または (イ) または (ウ) を図示すると解答の図を得る．

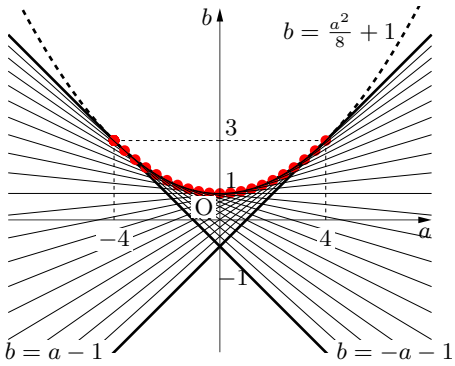
(別解 2) ab 平面上の放物線 $b = \dfrac{a^2}{8} + 1$ と

直線 $b = -at - 2t^2 + 1$ を連立すると

$$-2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 1 = \frac{a^2}{8} + 1$$

$$\therefore\quad -2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 = 0$$

$\therefore\quad a = -4t$ (重解)

すなわち，直線 $b = -at - 2t^2 + 1$ は放物線 $b = \dfrac{a^2}{8} + 1$ 上の点 $(-4t,\ 2t^2 + 1)$ における接線である．

t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かしながら，接線を引き続けると右図となり，解答の図を得る．