x の 8 次式 $f(x)$ は整数 k $(0 \leqq k \leqq 8)$ に対して，$f(k) = \dfrac{k^2}{k+1}$ を満たす．このとき，$f(9)$ の値を既約分数で求めると，$f(9) = \boxed{\text{ス}}$ である．

(23 山梨大 後 医 2(3))

【答】

ス
$\dfrac{41}{5}$

【解答】

等式 $f(k) = \dfrac{k^2}{k+1}$ は整数 k は $0 \leqq k \leqq 8$ に対して成り立つから

$$f(k) = \frac{k^2}{k+1} \iff (k+1)f(k) - k^2 = 0$$

である．$f(x)$ は 8 次式なので，x についての 9 次方程式

$$(x+1)f(x) - x^2 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

は $x = 0,\ 1,\ \cdots,\ 8$ を解にもつ．因数定理により

$$(x+1)f(x) - x^2 = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-8)\ (a \text{ は } 0 \text{ でない定数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．① に $x = -1$ を代入すると

$$0 - 1 = a \times (-1)(-2)(-3)\cdots(-9)$$

$$-1 = -a \times 9! \qquad \therefore \quad a = \frac{1}{9!} \qquad \cdots\cdots ②$$

① に $x = 9$ を代入すると

$$10f(9) - 9^2 = a \times 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 1$$

$$\therefore \quad f(9) = \frac{\frac{1}{9!} \times 9! + 9^2}{10} \quad (\because ②)$$

$$= \frac{1+81}{10} = \boldsymbol{\frac{41}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．