$a,\ b$ を $0<|a|<|b|$ を満たす実数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $|x^3-a^3|+|x^3-b^3|=|a^3-b^3|$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(2) n が正の偶数のとき，$|x^n-a^n|+|x^n-b^n|=|a^n-b^n|$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(23 群馬大 医 1)

【答】

(1) $\begin{cases} a \leqq x \leqq b & (b>0 \text{ のとき}) \\ b \leqq x \leqq a & (b<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $-|b| \leqq x \leqq -|a|,\ |a| \leqq x \leqq |b|$

【解答】

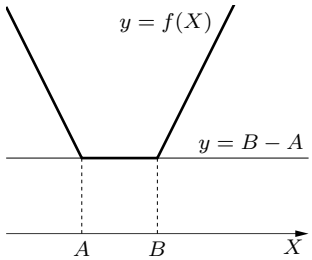
$$0<|a|<|b| \qquad \cdots\cdots ①$$

まずは，定数 $A,\ B$ を $A \neq B$ として，X についての方程式

$$|X-A|+|X-B|=|A-B| \qquad \cdots\cdots (*)$$

を解く．左辺を $f(X)$ とおくと，$A<B$ のとき

$$f(X)=\begin{cases} -2X+A+B & (X \leqq A \text{ のとき}) \\ B-A & (A \leqq X \leqq B \text{ のとき}) \\ 2X-A-B & (B \leqq X \text{ のとき}) \end{cases}$$



であり，右辺は

$$|A-B|=B-A$$

であるから，$(*)$ の解は

$$A \leqq X \leqq B$$

である．同じく，$A>B$ のときは

$$B \leqq X \leqq A$$

である．よって，$(*)$ の解は

$$(**)\begin{cases} A \leqq X \leqq B & (A<B \text{ のとき}) \\ B \leqq X \leqq A & (B<A \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

(1) $$|x^3-a^3|+|x^3-b^3|=|a^3-b^3| \qquad \cdots\cdots ②$$

$(*)$ において，$X=x^3,\ A=a^3,\ B=b^3$ とおくと，$(*)$ は ② となる．

① を $A,\ B$ で表す．

(i) $b>0$ のとき

$$① \iff 0<|a|<b$$

であるから

$$b^3>|a|^3=\max\{-a^3,\ a^3\} \geqq a^3 \qquad \therefore \quad A<B$$

である．

(ii) $b<0$ のとき

$$① \iff 0<|a|<-b$$

であるから

$$b^3<-|a|^3=\min\{-a^3,\ a^3\}\leqq a^3 \qquad \therefore \quad B<A$$

である．

したがって

$b>0$ のとき，$A<B$ であり，$(**)$ より ① を満たす実数 x は

$$a^3\leqq x^3\leqq b^3 \qquad \therefore \quad a\leqq x\leqq b$$

$b<0$ のとき，$B<A$ であり，$(**)$ より ① を満たす実数 x は

$$b^3\leqq x^3\leqq a^3 \qquad \therefore \quad b\leqq x\leqq a$$

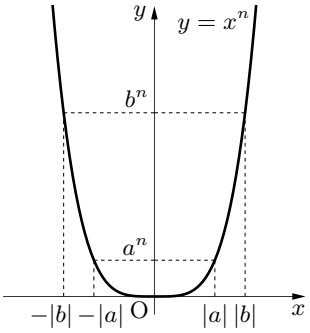
である．

以上より，求める実数 x は

$$\begin{cases}\boldsymbol{a\leqq x\leqq b} & \textbf{(}\boldsymbol{b>0}\ \textbf{のとき)}\\ \boldsymbol{b\leqq x\leqq a} & \textbf{(}\boldsymbol{b<0}\ \textbf{のとき)}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $$|x^n-a^n|+|x^n-b^n|=|a^n-b^n| \qquad \cdots\cdots ③$$



$(*)$ において，$X=x^n$，$A=a^n$，$B=b^n$ とおくと，$(*)$ は ③ となる．

n は正の偶数であるから

$$① \iff 0<a^n<b^n$$

$$\therefore \quad A<B$$

よって，③ を満たす実数 x は

$$a^n\leqq x^n\leqq b^n$$

であり，右図より

$$\boldsymbol{-|b|\leqq x\leqq -|a|,\quad |a|\leqq x\leqq |b|} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．