方程式

$$2x^4 + Cx^3 + (A+3)x^2 + (B-A)x - B = 0$$

が 4 つの解 1, α, β, γ をもつとき，以下の問に答えよ．ただし，定数 A, B, C は実数とする．

(1) C を求めよ．
(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ を A を用いて表せ．
(3) $\alpha = 1 + 2i$ であるとき，β と γ を求めよ．ただし，γ は実数とする．

(23 群馬大 理工 2)

【答】
(1) $C = -5$
(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \dfrac{9}{4} - A$
(3) $\beta = 1 - 2i$，$\gamma = -\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$2x^4 + Cx^3 + (A+3)x^2 + (B-A)x - B = 0$$

(1) $f(x) = 2x^4 + Cx^3 + (A+3)x^2 + (B-A)x - B$ とおく．$x = 1$ は $f(x) = 0$ の解であるから

$$f(1) = 0$$
$$2 + C + (A+3) + (B-A) - B = 0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{C = -5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) より

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + (A+3)x^2 + (B-A)x - B$$

であり，$x - 1$ による割り算を実行すると

$$f(x) = (x+5)(2x^3 - 3x^2 + Ax + B)$$

1	2	-5	$A+3$	$B-A$	$-B$
		2	-3	A	B
	2	-3	A	B	0

となる．α, β, γ は

$$2x^3 - 3x^2 + Ax + B = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{3}{2} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{A}{2} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{B}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{A}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{9}{4} - A} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(3) ① は実数係数の 3 次方程式であるから，① が虚数 $\alpha = 1+2i$ を解にもつならば，$\overline{\alpha} = 1-2i$ も解となる．α 以外の解 β, γ のうち γ は実数であるから

$$\beta = 1 - 2i$$

である．さらに，② より

$$(1+2i) + (1-2i) + \gamma = \frac{3}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\gamma = -\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．