2 次方程式 $x^2 - bx + 10 = 0$ が $2 < x < 3$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつとき，実数 b のとりうる値の範囲は $\boxed{①}$ である．

(23 関西大 全学日程 理系 2 月 7 日 4(1))

【答】

①
$\dfrac{19}{3} < a < 7$

【解答】

$f(x) = x^2 - bx + 10$ とおく．

「2 次方程式 $f(x) = 0$ が $2 < x < 3$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつ」 …… $(*)$

ための条件を $f(2)f(3) = (14 - 2b)(19 - 3b)$ の符号で場合分けして求める．

(i) $f(2)f(3) < 0$ のとき

このとき $\dfrac{19}{3} < b < 7$ であり，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $f(2)f(3) = 0$ のとき

このとき，$b = 7$ または $b = \dfrac{19}{3}$ である．

$b = 7$ のとき，$f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$ であり，$f(x) = 0$ の解は

$$x = 2,\ 5 \qquad \text{条件 } (*) \text{ を満たさない．}$$

$b = \dfrac{19}{3}$ のとき，$3f(x) = 3x^2 - 19x + 30 = (x - 3)(3x - 10)$ であり，$f(x) = 0$ 解は

$$x = 3,\ \frac{10}{3} \qquad \text{条件 } (*) \text{ を満たさない．}$$

(iii) $f(2)f(3) > 0$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} \text{判別式}: b^2 - 4 \cdot 10 \geqq 0 \\ \text{軸の位置}: 2 < \dfrac{b}{2} < 3 \\ \text{端点の符号}: f(2) > 0 \text{ かつ } f(3) > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b \leqq -2\sqrt{10} \text{ または } 2\sqrt{10} \leqq b & \cdots\cdots ① \\ 4 < b < 6 & \cdots\cdots ② \\ 14 - 2b > 0 \text{ かつ } 19 - 3b > 0 & \end{cases}$$

① かつ ② を満たす b は存在しないので，条件 $(*)$ を満たさない．

以上，(i)(ii)(iii) より，実数 b のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{19}{3} < b < 7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- b を分離して，方程式

$$x^2 + 10 = bx$$

あるいは，$x \neq 0$ が確認されるので，方程式

$$x + \frac{10}{x} = b$$

を考えてもよい．

曲線 $y = x + \dfrac{10}{x}$ $(2 < x < 3)$ と直線 $y = b$ が共有点をもつための b の値の範囲を求める．

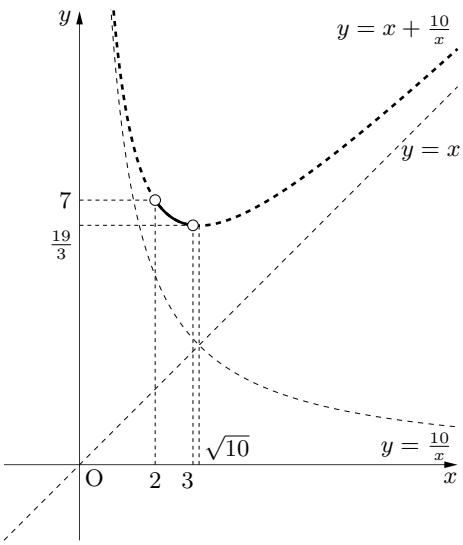
$g(x) = x + \dfrac{10}{x}$ とおくと

$$g'(x) = 1 - \frac{10}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 10}{x^2}$$

$2 < x < 3$ において $g'(x) < 0$ なので，$g(x) = x + \dfrac{10}{x}$ は単調減少であり

$$g(2) > g(x) > g(3)$$
$$\therefore \quad 7 > g(x) > \frac{19}{3}$$

すなわち，b のとりうる値の範囲は

$$\frac{19}{3} < b < 7$$

である．