x の 4 次方程式

$$3x^4 - 10x^3 + ax^2 - 10x + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．ただし a は実数の定数である．$x = 0$ は方程式 $(*)$ の解ではないので，以下 $x \fallingdotseq 0$ とする．

(1) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおく．x が 0 でない実数を動くとき，t のとり得る値の範囲は $t \leqq \boxed{}$，$\boxed{} \leqq t$ である．また，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + b$ とおくと $b = \boxed{}$ である．

(2) 方程式 $(*)$ を $t = x + \dfrac{1}{x}$ の 2 次方程式として表せば $\boxed{}t^2 - \boxed{}t + a - \boxed{} = 0$ となる．

(3) x の方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲は $a \leqq \boxed{}$ である．

(4) x の方程式 $(*)$ が相異なる 4 つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲は $a < \boxed{}$ である．

(23 青山学院大 理工)

【答】

-2	2	-2	3	10	6	14	-26

【解答】

$$3x^4 - 10x^3 + ax^2 - 10x + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $x \fallingdotseq 0$ より

$$t = x + \frac{1}{x} \iff x^2 - tx + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．x が 0 でない実数を動くときの $t = x + \dfrac{1}{x}$ を満たす t のとり得る値の範囲は，① を満たす実数 x が存在するような t の値の集合である．

① の判別式を D とおくと

$$D = t^2 - 4 = (t+2)(t-2)$$

であり，① が実数解をもつ条件は

$$D \geqq 0 \qquad \therefore \quad t \leqq \mathbf{-2}, \quad \mathbf{2} \leqq t \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + b$ とおくとき

$$b = x^2 + \frac{1}{x^2} - t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = -2x \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{-2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $x \fallingdotseq 0$ であるから，$(*)$ の両辺を x^2 で割って

$$3x^2 - 10x + a - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + a = 0$$

$$3(t^2 - 2) - 10t + a = 0 \qquad \left(\because\ t = x + \frac{1}{x} \text{および (1) の後半}\right)$$

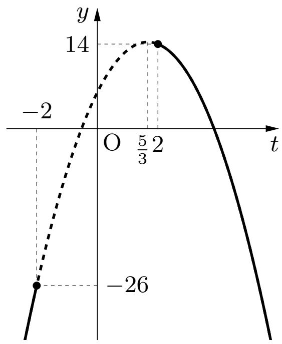
$$\therefore \quad \mathbf{3}t^2 - \mathbf{10}t + a - \mathbf{6} = 0 \qquad \cdots\cdots (**) \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(3) $(**)$ を変形し

$$a = -3t^2 + 10t + 6$$

$f(t) = -3t^2+10t+6$ とおくと，$(*)$ が実数解をもつときの a のとり得る値の範囲は，$(**)$ を満たす t が $t \leqq -2,\ 2 \leqq t$ の範囲に存在するような a の値の集合であり，それは曲線 $y = f(t)\ (t \leqq -2,\ 2 \leqq t)$ と直線 $y = a$ が共有点をもつような a の値の集合である．



$$f(t) = -3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{43}{3}$$

曲線 $y = f(t)\ (t \leqq -2,\ 2 \leqq t)$ のグラフは右図となるから a のとり得る値の範囲は

$$a \leqq \mathbf{14} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) x の方程式 $(*)$ が相異なる 4 つの実数解をもつためには，① を満たす t が 2 つ必要であり，このとき $a \leqq -26$ である．(1) より

$t = \pm 2$ のとき，$D = 0$ であり，x は 1 つ決まる．
$|t| > 2$ のとき，$D > 0$ であり，x は 2 つ決まる．

したがって，$a < -26$ が必要である．

$a < -26$ のときの $(**)$ の異なる 2 実数解 t を $t_1,\ t_2$ とおき，$t = t_1$ のときの ① の解を $\alpha,\ \alpha'$，$t = t_2$ のときの ① の解を $\beta,\ \beta'$ おく．$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$ がすべて異なることを確認する．$\alpha \neq \alpha'$，$\beta \neq \beta'$ であるから，$\alpha \neq \beta,\ \beta'$，$\alpha' \neq \beta,\ \beta'$ であることを確認する．

$t = t_1$ のとき，方程式 ① における解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' = t_1 \\ \alpha\alpha' = 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} t_1 = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha' = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

であり，① の解は $\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}$ である．同じく，$t = t_2$ のとき，方程式 ① の解は $\beta,\ \dfrac{1}{\beta}$ であり，$t_2 = \beta + \dfrac{1}{\beta}$ である．ここで

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \frac{(\alpha^2+1)\beta - (\beta^2+1)\alpha}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta) + (\beta-\alpha)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)}{\alpha\beta} \end{aligned}$$

である．$t_1 \neq t_2$ なので

$$\alpha - \beta \neq 0 \text{ かつ } \alpha\beta - 1 \neq 0 \qquad \therefore \quad \alpha \neq \beta \text{ かつ } \alpha \neq \frac{1}{\beta}\ (= \beta')$$

逆数をとると

$$\frac{1}{\alpha} \neq \frac{1}{\beta} \text{ かつ } \frac{1}{\alpha} \neq \beta \qquad \therefore \quad \alpha' \neq \frac{1}{\beta}\ (= \beta') \text{ かつ } \alpha' \neq \beta$$

である．

以上より，$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$ はすべて異なる．よって，a のとり得る値の範囲は

$$a < \mathbf{-26} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．