不等式 $|2x-3|-3|x-5|>0$ を満たす実数 x の範囲を求めなさい.

(23 公立千歳科技大 理工 1(2))

【答】 $\dfrac{18}{5}<x<12$

【解答】

$$|2x-3|-3|x-5|>0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

場合分けしながら絶対値をはずす.

(i) $x \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$$(*) \iff -(2x-3)+3(x-5)>0$$
$$\therefore \quad x-12>0$$

(i) の範囲とあわせて　　解なし.

(ii) $\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 5$ のとき

$$(*) \iff (2x-3)+3(x-5)>0$$
$$\therefore \quad 5x-18>0$$

(ii) の範囲とあわせて　　$\dfrac{18}{5}<x \leqq 5.$

(iii) $5 \leqq x$ のとき

$$(*) \iff (2x-3)-3(x-5)>0$$
$$\therefore \quad -x+12>0$$

(iii) の範囲とあわせて　　$5 \leqq x<12.$

以上 (i)，(ii)，(iii) より，求める解は

$$\frac{18}{5}<x<12$$

である.

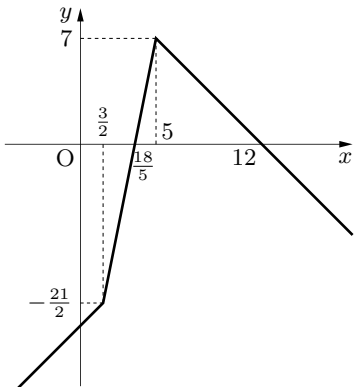
- $f(x)=|2x-3|-3|x-5|$ とおき， $y=f(x)$ のグラフと x 軸との位置関係を調べてもよい.

$$f(x)=\begin{cases} x-12 & \left(x \leqq \dfrac{3}{2} \text{ のとき}\right) \\ 5x-18 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 5 \text{ のとき}\right) \\ -x+12 & (5 \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

より，グラフは右図となり，不等式 $f(x) \geqq 0$ の解は

$$\frac{18}{5}<x<12$$

である.



- 次の絶対値についての同値変形を利用する.

(i) $|A|<B \iff -B<A<B$

(ii) $A<|B| \iff B<-A$ または $A<B$ (A の正負は問わない)

$$
\begin{aligned}
(*) &\iff |3(x-5)| < |2x-3| \qquad \cdots\cdots ㋐ \\
&\iff -|2x-3| < 3(x-5) < |2x-3| \qquad (\because\ (\mathrm{i}))\\
&\iff \begin{cases} |2x-3| > 15-3x \\ 3x-15 < |2x-3| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x-3 < -(15-3x) \text{ または } 15-3x < 2x-3 \\ 2x-3 < -(3x-15) \text{ または } 3x-15 < 2x-3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 12 < x \text{ または } \dfrac{18}{5} < x \\ x < \dfrac{18}{5} \text{ または } x < 12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{18}{5} < x \\ x < 12 \end{cases} \qquad (\because\ (\mathrm{ii}))
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{18}{5} < x < 12$ を得る.

- ㋐ の辺々を平方してもよい.

$$㋐ \iff 9(x-5)^2 < (2x-3)^2$$

式を展開し整理すると

$$
\begin{aligned}
&9x^2 - 90x + 225 < 4x^2 - 12x + 9 \\
&5x^2 - 78x + 216 < 0 \\
&(5x-18)(x-12) < 0 \\
\therefore\ &\frac{18}{5} < x < 12
\end{aligned}
$$

である.