実数 x についての不等式

$$|x+6| \leqq 2$$

の解は

$$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$$

である．

よって，実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$$

を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる．

特に

$$(a-b)(c-d) = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であるとき，さらに

$$(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つならば

$$(a-d)(c-b) = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

であることが，等式 ①, ②, ③ の左辺を展開して比較することによりわかる．

(23 共通テスト 本試験 I・IA 1[1])

【答】

アイ	ウエ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
-8	-4	2	2	4	4	7	3

【解答】

$$|x+6| \leqq 2$$

式を変形すると

$$-2 \leqq x+6 \leqq 2$$

$$\therefore \quad \mathbf{-8} \leqq x \leqq \mathbf{-4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

よって，実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$$

を満たしているとき，上式の x を $(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ に置き換えることにより

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

を得る．$1-\sqrt{3}<0$ であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{-8}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{-4}{1-\sqrt{3}}$$

である．

$$\frac{-4}{1-\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 2(\sqrt{3}+1)$$
$$\frac{-8}{1-\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{-4}{1-\sqrt{3}} = 4(\sqrt{3}+1)$$

であるから

$$\mathbf{2}+\mathbf{2}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \mathbf{4}+\mathbf{4}\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることがわかる．

特に

$$(a-b)(c-d) = 4+4\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

であるとき，さらに

$$(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つならば，①, ② の左辺を展開すると

$$ac-ad-bc+bd = 4+4\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ①'$$
$$ab-ad-bc+cd = -3+\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②'$$

③の左辺を展開すると

$$(a-d)(c-b) = ac-ab-cd+bd$$

であるから，①′ から ②′ の辺々を引くと

$$ac-ab-cd+bd = 7+3\sqrt{3}$$

すなわち

$$(a-d)(c-b) = \mathbf{7}+\mathbf{3}\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることがわかる．