k を定数として，x についての不等式

$$\sqrt{5}x < k - x < 2x + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) 不等式 $k - x < 2x + 1$ を解くと

$$x > \frac{k - \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，不等式 $\sqrt{5}x < k - x$ を解くと

$$x < \frac{\boxed{\text{ウエ}} + \sqrt{5}}{\boxed{\text{オ}}}k$$

である．

よって，不等式 ① を満たす x が存在するような k の値の範囲は

$$k < \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

(2) p, q は $p < q$ を満たす実数とする．x の値の範囲 $p < x < q$ に対し，$q - p$ をその範囲の幅ということにする．

② が成り立つとき，不等式 ① を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるような k の値の範囲は

$$k < \boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}}\sqrt{8}$$

である．

(23 共通テスト 追・再試験 I・IA 1[1])

【答】

ア	イ	ウエ	オ	カ	キ	クケ	コ
1	3	-1	4	7	3	-8	4

【解答】

$$\sqrt{5}x < k - x < 2x + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) 不等式 $k - x < 2x + 1$ を解くと

$$k - 1 < 3x \qquad \therefore \quad x > \frac{\boldsymbol{k-1}}{\boldsymbol{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，不等式 $\sqrt{5}x < k - x$ を解くと

$$(\sqrt{5} + 1)x < k$$

$$\therefore \quad x < \frac{k}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1}k = \frac{\boldsymbol{-1+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}k \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

よって，不等式 ①，すなわち $\dfrac{k-1}{3} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ を満たす x が存在する条件は

$$\frac{k-1}{3} < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}k$$

であり，これを満たす k の値の範囲は

$$4(k-1) < 3(-1+\sqrt{5})k$$

$$(7-3\sqrt{5})k < 4$$

$7-3\sqrt{5} > 0$ なので

$$k < \frac{4}{7-3\sqrt{5}} = \frac{4(7+3\sqrt{5})}{49-45} = \mathbf{7+3}\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ② が成り立つとき，不等式 ① を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるということは

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}k - \frac{k-1}{3} > \frac{\sqrt{5}}{3}$$

を満たすことであり，この不等式を満たす k の値の範囲は

$$3(-1+\sqrt{5})k - 4k + 4 > 4\sqrt{5}$$

$$(-7+3\sqrt{5})k > 4\sqrt{5} - 4$$

$-7+3\sqrt{5} < 0$ なので

$$k < \frac{4(\sqrt{5}-1)}{-7+3\sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{5}-1)(-7-3\sqrt{5})}{49-45} = \mathbf{-8-4}\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．