(i) a, b を実数とする．2 次不等式

$$x^2+ax+b>0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の解がすべての実数となるための必要十分条件を，次の二つの方針で考えよう．

方針 1

2 次関数 $y=x^2+ax+b$ の最小値に着目する．

$y=x^2+ax+b$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a^{\boxed{\text{エ}}}+b$ である．よって，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a^{\boxed{\text{エ}}}+b \;\boxed{\boxed{\text{オ}}}\; 0$$

である．

方針 2

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ に解の公式を適用したときの根号の中に着目する．

$x^2+ax+b=0$ に解の公式を適用すると，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}}\,b}}{2}$ となる．

よって，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$a^{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}}\,b \;\boxed{\boxed{\text{ク}}}\; 0$$

である．

$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{ク}}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $<$	① $=$	② $>$	③ $\leqq$	④ $\geqq$

(ii) c を実数とする．2 次不等式 $-x^2+cx-4<0$ の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$\boxed{\text{ケコ}} < c < \boxed{\text{サ}}$$

である．

(23 共通テスト 追・再試験 I 3[1](1))

【答】

アイ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケコ	サ
-1	4	2	2	2	4	0	-4	4

【解答】

(i) $$x^2+ax+b>0 \qquad \cdots\cdots ①$$

方針 1 で考える．

$y=x^2+ax+b$ のグラフは下に凸であるから，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は「(y の最小値) >0」となることである．y は

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$

と変形されるから，最小値は

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}a^{\mathbf{2}}+b \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．よって，①の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$-\frac{a^2}{4}+b>0 \qquad ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

方針 2 で考える．

① の解がすべての実数となるための必要十分条件は ① が実数解をもたないことである．

解の公式を適用すると

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}b}}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となるから，求める条件は

$$a^2-4b<0 \qquad ⓪ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) $-x^2+cx-4<0$ の辺々に -1 をかけると

$$x^2-cx+4>0$$

である．

方針 1 を用いて，$-x^2+cx-4<0$ の解がすべての実数となるための条件を求める．

$$x^2-cx+4=\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}+4$$

であり，$y=x^2-cx+4$ の最小値は $-\dfrac{c^2}{4}+4$ であるから，求める条件は

$$\begin{aligned}&-\frac{c^2}{4}+4>0\\&c^2-4^2<0\\&(c+4)(c-4)<0\\&\therefore\quad \mathbf{-4}<c<\mathbf{4}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 方針 2 を用いる．

  $x^2-cx+4=0$ の解は

  $$x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4\cdot4}}{2}$$

  であるから，$-x^2+cx-4<0$ の解がすべての実数となるための条件は

  $$c^2-4^2<0 \qquad \therefore\quad -4<c<4$$

  である．