不等式 $|2x-1|+|x+3| \geqq 6$ を解け.

(23 東北学院大 文系・情報 A 1(1))

【答】 $x \leqq -2$ または $\dfrac{4}{3} \leqq x$

【解答】

$$|2x-1|+|x+3| \geqq 6 \qquad \cdots\cdots (*)$$

場合分けしながら絶対値をはずす.

(i) $x \leqq -3$ のとき

$$(*) \iff -(2x-1)-(x+3) \geqq 6$$

$$-3x-2 \geqq 6 \qquad \therefore \quad x \leqq -\frac{8}{3}$$

(i) の範囲とあわせると　　$x \leqq -3$

(ii) $-3 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$(*) \iff -(2x-1)+(x+3) \geqq 6$$

$$-x+4 \geqq 6 \qquad \therefore \quad x \leqq -2$$

(ii) の範囲とあわせると　　$-3 \leqq x \leqq -2$

(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq x$ のとき

$$(*) \iff (2x-1)+(x+3) \geqq 6$$

$$3x+2 \geqq 6 \qquad \therefore \quad x \geqq \frac{4}{3}$$

(iii) の範囲とあわせると　　$\dfrac{4}{3} \leqq x$

以上 (i), (ii), (iii) より, 求める範囲は

$$\boldsymbol{x \leqq -2 \text{ または } \frac{4}{3} \leqq x} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

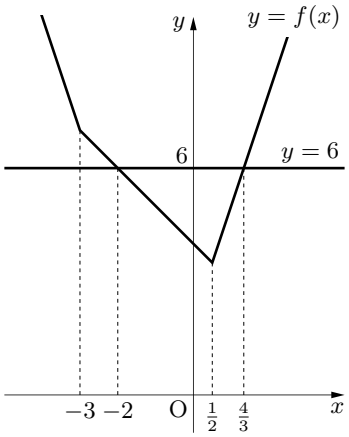
- $f(x)=|2x-1|+|x+3|$ とおき, $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=6$ の位置関係を調べる.

$$f(x)=\begin{cases} -3x-2 & (x \leqq -3 \text{ のとき}) \\ -x+4 & \left(-3 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ 3x+2 & \left(\frac{1}{2} \leqq x \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

であり, $y=f(x)$ と $y=6$ の交点の座標は

$$(-2,\ 6), \quad \left(\frac{4}{3},\ 6\right)$$

であるから, グラフは右図となり, 不等式 $f(x) \geqq 6$ の解は

$$x \leqq -2 \text{ または } \frac{4}{3} \leqq x$$

である.