高校 1 年生の太郎さんと花子さんのクラスでは，文化祭でやきそば屋を出店することになった．二人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討するためにアンケート調査を行い，1 皿あたりの価格と売り上げ数の関係について次の表のように予測した．

1 皿あたりの価格 (円)	100	150	200	250	300
売り上げ数　　(皿)	1250	750	450	250	50

この結果から太郎さんと花子さんは，1 皿あたりの価格が 100 円以上 300 円以下の範囲で，予測される利益 (以下，利益) の最大値について考えることにした．

太郎： 価格を横軸，売り上げ数を縦軸にとって散布図をかいてみたよ．
花子： 散布図の点の並びは，1 次関数のグラフのようには見えないね．2 次関数のグラフみたいに見えるよ．
太郎： 価格が 100, 200, 300 のときの点を通る 2 次関数のグラフをかくと，図 1 のように価格が 150, 250 のときの点もそのグラフの近くにあるよ．
花子： 現実には，もっと複雑な関係なのだろうけど，1 次関数と 2 次関数で比べると，2 次関数で考えた方がよいような気がするね．

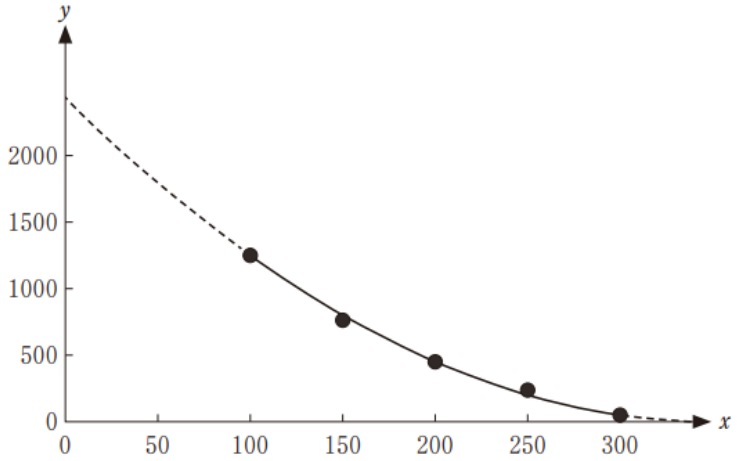

図　1

2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフは，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るとする．このとき，$b =$ $\boxed{\text{ソタチ}}$ である．

二人は，1 皿あたりの価格 x と売り上げ数 y の関係が ① を満たしたときの，$100 \leqq x \leqq 300$ での利益の最大値 M について考えることにした．

1 皿あたりの材料費は 80 円であり，材料費以外にかかる費用は 5000 円である．よって，$x - 80$ と売り上げ数の積から，5000 を引いたものが利益となる．

このとき，売り上げ数を ① の右辺の 2 次式とすると，利益は x の $\boxed{\text{ツ}}$ 次式となる．一方で，売り上数として ① の右辺の代わりに x の $\boxed{\text{テ}}$ 次式を使えば，利益は x の 2 次式となる．

太郎： 利益が $\boxed{\text{ツ}}$ 次式だと，今の私たちの知識では最大値 M を正確のに求めることができないね．

花子： ① の右辺の代わりに $\boxed{\text{テ}}$ 次式を使えば利益は 2 次式になるから，最大値を求められるよ．

太郎： 現実の問題を考えるときには正確な答えが出せないことも多いから，自分の知識の範囲内で工夫しておおよその値を出すことには価値があると思うよ．

花子： 考えているのが利益だから，① の右辺の代わりの式は売り上げ数を少なく見積もった式を考えると手堅いね．

太郎： 少なく見積もるということは，その関数のグラフは ① のグラフより，下の方にあるということだよね．

1 次関数

$$y = -4x + 1160 \qquad \cdots\cdots ②$$

を考える．このとき，① と ② のグラフの位置関係は次の図 2 のようになっている．

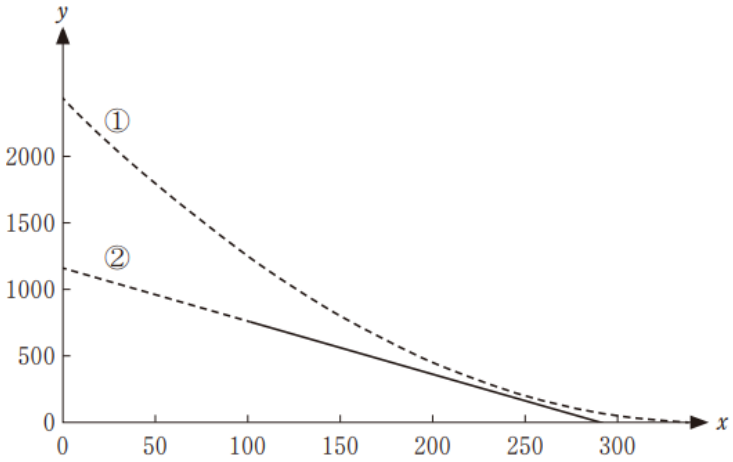

図　2

① の右辺の代わりに ② の右辺を使うと，売り上げ数を少なく見積もることになる．売り上げ数を ② の右辺としたときの利益 z は

$$z = -\boxed{\text{ト}}\,x^2 - \boxed{\text{ナニヌネ}}\,x - 97800$$

で与えられる．z が最大となる x を p とおくと，$p = \boxed{\text{ノハヒ}}$ であり，z の最大値は 39100 である．

太郎： 売り上げ数を少なく見積もった式は，各 x について値が ① より小ればよいので，色々な式が考えられるね．

花子： それらの式を ① の右辺の代わりに使ったときの利益の最大値と，① の右辺から計算される利益の最大値 M との関係はどうなるのかな．

1 次関数

$$y = -8x + 1968 \qquad \cdots\cdots ③$$

を考える．売り上げ数を ③ の右辺としたときの利益は $x = 163$ のときに最大となり，最大値は 50112 となる．

また，①〜③ のグラフの位置関係は次の図 3 のようになっている．

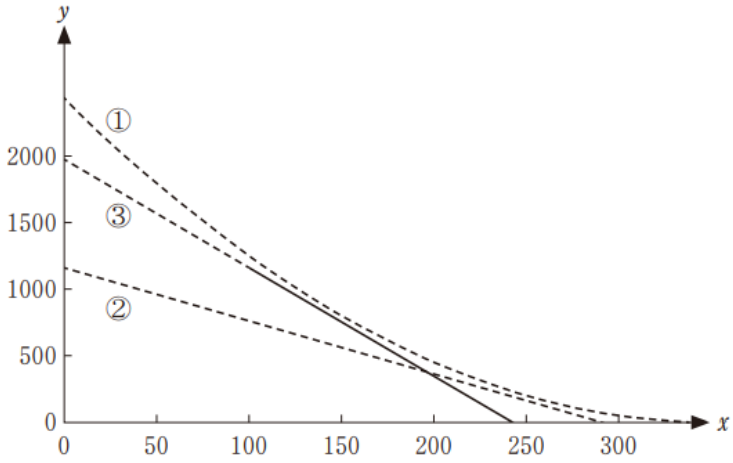

図　3

売り上げ数を ① の右辺としたときの利益の記述として，次の ⓪〜⑥ のうち，正しいものは $\boxed{フ}$ と $\boxed{ヘ}$ である．

$\boxed{フ}$，$\boxed{ヘ}$ の解答群 (解答の順序は問わない．)

⓪ 利益の最大値 M は 39100 である．
① 利益の最大値 M は 50112 である．
② 利益の最大値 M は $\dfrac{39110 + 50112}{2}$ である．
③ $x = 163$ とすれば，利益は少なくとも 50112 以上となる．
④ $x = p$ とすれば，利益は少なくとも 39100 以上となる．
⑤ $x = 163$ のときに利益は最大値 M をとる．
⑥ $x = p$ のときに利益は最大値 M をとる．

1 次関数

$$y = -6x + 1860 \qquad \cdots\cdots ④$$

を考える．$100 \leqq x \leqq 300$ において，売り上げ数を ④ の右辺としたときの利益は $x = 195$ のときに最大となり，最大値は 74350 となる．

また，①～④ のグラフの位置関係は次の図 4 のようになっている．

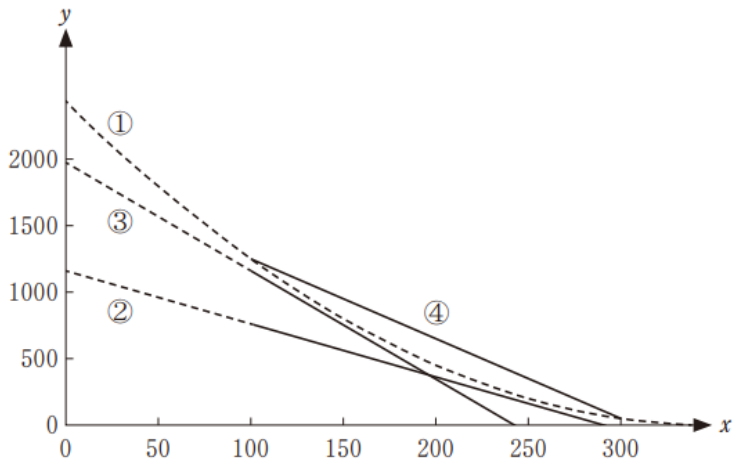

図　4

売り上げ数を ① の右辺としたときの利益の最大値 M についての記述として，次の ⓪～④ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ホ}}$ である．

$\boxed{\text{ホ}}$ の解答群

⓪ 利益の最大値 M は 50112 より小さい．
① 利益の最大値 M は 50112 である．
② 利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい．
③ 利益の最大値 M は 74350 である．
④ 利益の最大値 M は 74350 より大きい．

(23 共通テスト 追・再試験 I 3[2] IA 2[1])

【答】

ソタチ	ツ	テ	ト	ナニヌネ	ノハヒ	フ	ヘ	ホ
−14	3	1	4	1480	185	3	4	2

【解答】

2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフは，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るから

$$\begin{cases} 1250 = 10000a + 100b + c & \cdots\cdots ⓐ \\ 450 = 40000a + 200b + c & \cdots\cdots ⓑ \\ 50 = 90000a + 300b + c & \cdots\cdots ⓒ \end{cases}$$

が成り立つ．c の消去するように式を変形すると

$$\begin{cases} ⓑ - ⓐ : 30000a + 100b = -800 \\ ⓒ - ⓑ : 50000a + 100b = -400 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 300a + b = -8 & \cdots\cdots ⓓ \\ 500a + b = -4 & \cdots\cdots ⓔ \end{cases}$$

a の消去するように，$5 \times ⓓ - 3 \times ⓔ$ として変形すると

$$2b = 5 \times (-8) - 3 \times (-4)$$
$$\therefore \quad b = \frac{-40+12}{2} = \mathbf{-14} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

利益 z は

$$z = (x-80)y - 5000$$

であり，売り上げ数 y を ① の右辺の 2 次式とすると

$$z = (x-80)(ax^2 - 14x + c) - 5000 \qquad \cdots\cdots (*)$$
$$\left(= (x-80)\left(\frac{1}{50}x^2 - 14x + 2450\right) - 5000\right)$$

であり，$a \neq 0$ だから

利益 z は x の **3** 次式 ……(答)

となる．一方で，売り上数 y として ① の右辺の代わりに x の **1** 次式を使えば， ……(答)

利益 z は x の 2 次式

となる．

売り上げ数 y として $y = -4x + 1160$ …… ② の右辺を使うと，利益 z は

$$z = (x-80)(-4x+1160) - 5000$$
$$= \mathbf{-4}x^2 + \mathbf{1480}x - 97800 \qquad \cdots\cdots(答)$$

で与えられる．これは

$$z = -4(x-185)^2 + 4 \cdot 185^2 - 97800$$
$$= -4(x-185)^2 + 39100 \qquad \cdots\cdots (**)$$

と変形されるから，z が最大となる x の値 p は

$$p = \mathbf{185} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，z の最大値は 39100 である．

売り上げ数 y として $y = -8x + 1968$ …… ③ の右辺を使うと，利益 z は

$$z = -(x-80)(-8x+1968) - 5000$$
$$= -8(x-163)^2 + 50112 \qquad \cdots\cdots (***)$$

となる．売り上げ数を ① の右辺としたときの利益 z の記述として

⓪ 利益の最大値 M は 50112 より大きいから，誤りである　($\because$ $(***)$).

① 利益の最大値 M は 50112 より大きいから，誤りである．

② 利益の最大値 M は 50112 より大きいから，誤りである．

③ $x = 163$ とすれば，$(***)$ より，利益は少なくとも 50112 以上となる．正しい．

④ $x = p = 185$ とすれば，$(**)$ より，利益は少なくとも 39100 以上となる．正しい ($\because$ $(**)$).

⑤ 利益が最大となる x の値は $(***)$ を最大とする x と一致するとは言えないから，正しいとは言えない．

⑥ 利益が最大となる x の値は $(**)$ を最大とする x と一致するとは言えないから，正しいとは言えない．

以上より，正しいと言えるには　③, ④　である．　……(答)

売り上げ数 y として $y = -6x + 1860$ …… ④ の右辺を使うと，利益 z は

$$\begin{aligned} z &= -(x-80)(-6x+1860) - 5000 \\ &= -8(x-195)^2 + 74350 \qquad \cdots\cdots (****) \end{aligned}$$

となる．売り上げ数を ① の右辺としたときの利益 z の記述として

⓪ 利益の最大値 M は 50112 より大きいから，誤りである　($\because$ $(***)$).

① 利益の最大値 M は 50112 より大きいから，誤りである．

② 利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さいから，正しい　($\because$ $(****)$).

③ 利益の最大値 M は 74350 より小さいから，誤りである．

④ 利益の最大値 M は 74350 より小さいから，誤りである．

以上より，正しいと言えるには　②　である．　……(答)