n を正の整数とする．x の 2 次関数 $f(x)=(n+3)x^2-2(n^2+3n+3)x+1$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $n=1$ とする．m が整数の範囲を動くときの $f(m)$ の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．m が整数の範囲を動くとき，$f(m)$ が最小となる m を求めよ．

(23 富山大 理・工・都市 3)

【答】

(1) 最小値 -11 $(m=2)$

(2) $m=\begin{cases} 2 & (n=2 \text{ のとき}) \\ 3,\ 4 & (n=3 \text{ のとき}) \\ n & (n \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

$$f(x)=(n+3)x^2-2(n^2+3n+3)x+1$$

(1) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2-14x+1 \\ &= 4\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{45}{4} \end{aligned}$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，軸の方程式は $x=\dfrac{7}{4}$ であり，$\dfrac{7}{4}$ に最も近い整数は 2 であるから，m が整数の範囲を動くとき $f(m)$ は

$$\boldsymbol{m=2} \text{ で最小値 } f(2)=16-28+1=\boldsymbol{-11} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$f(x)=(n+3)\left(x-\frac{n^2+3n+3}{n+3}\right)^2+1-\frac{(n^2+3n+3)^2}{n+3}$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，軸の方程式は $x=\dfrac{n^2+3n+3}{n+3}$ である．

$$\frac{n^2+3n+3}{n+3}=n+\frac{3}{n+3}$$

$f(m)$ が最小となるのは，m が $n+\dfrac{3}{n+3}$ に最も近い整数のときである．

$n=2$ のとき，軸 $x=2+\dfrac{3}{5}$ より　$m=3$

$n=3$ のとき，軸 $x=3+\dfrac{1}{2}$ より　$m=3,\ 4$

$n \geqq 4$ のとき，軸 $x=n+\dfrac{3}{n+3}$ であり，$0<\dfrac{3}{n+3}<\dfrac{1}{2}$ であるから　$m=n$

すなわち，$f(m)$ が最小となる m は

$$\boldsymbol{m=\begin{cases} 2 & (n=2 \text{ のとき}) \\ 3,\ 4 & (n=3 \text{ のとき}) \\ n & (n \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．